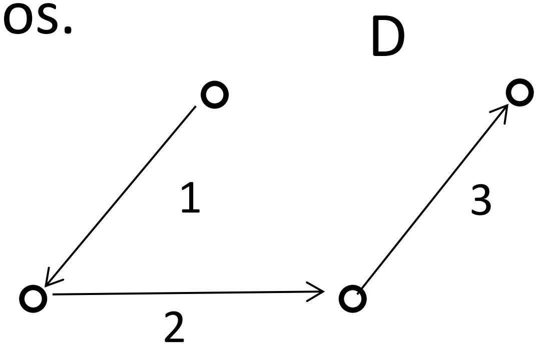
Resultados clásicos y resultados recientes en núcleos en digráficas.

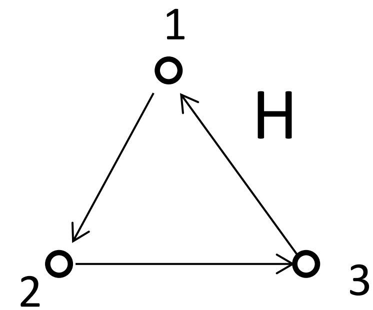
Hortensia Galeana Sánchez
Instituto de Matemáticas

Considere dos digráficas D y H.

D sin flechas múltiples ni lazos.

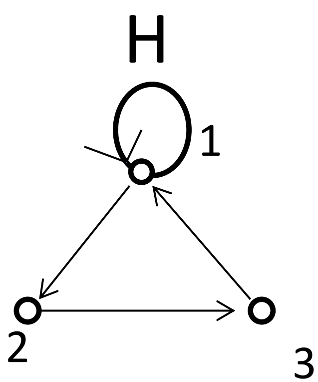
H posiblemente con lazos.

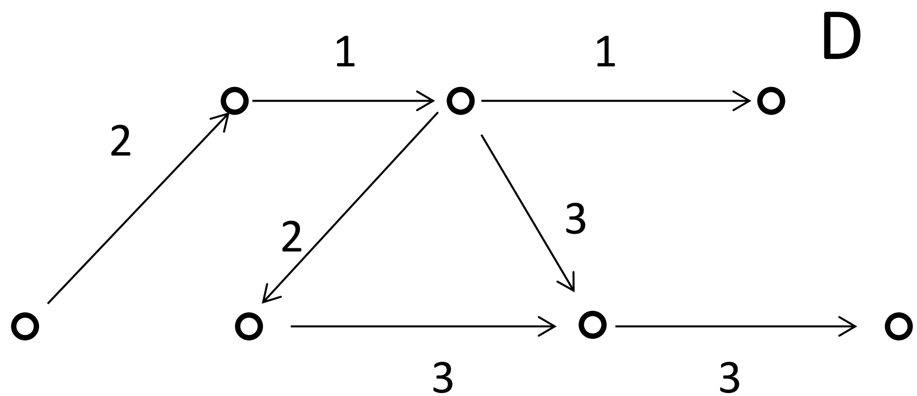




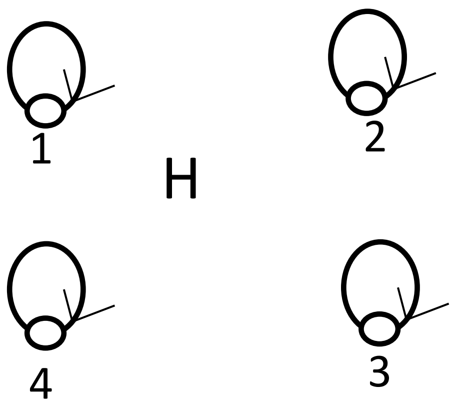
H-coloración de D
V(H) = {1,2,3}

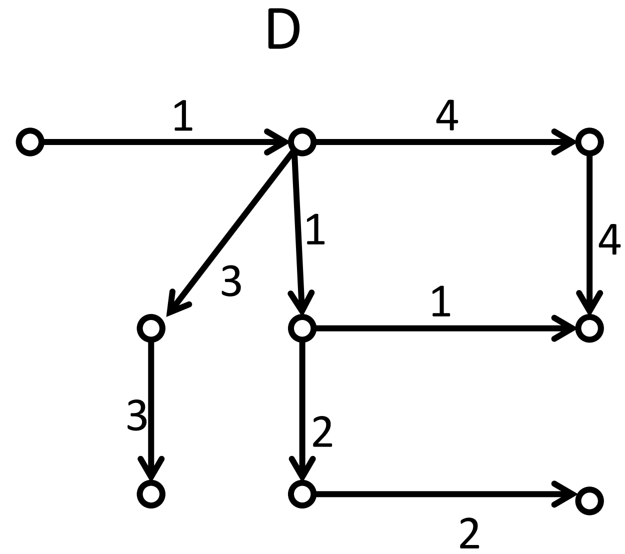
Un camino dirigido o una trayectoria dirigida, $\mathcal{C}$, es un H-camino (respectivamente, una H trayectoria) si $\mathcal{C} = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$
y $(\text{color}(v_i, v_{i+1}), \text{color}(v_{i+1}, v_{i+2})) \in F(H)$ para cada $0 \leq i \leq n - 2$

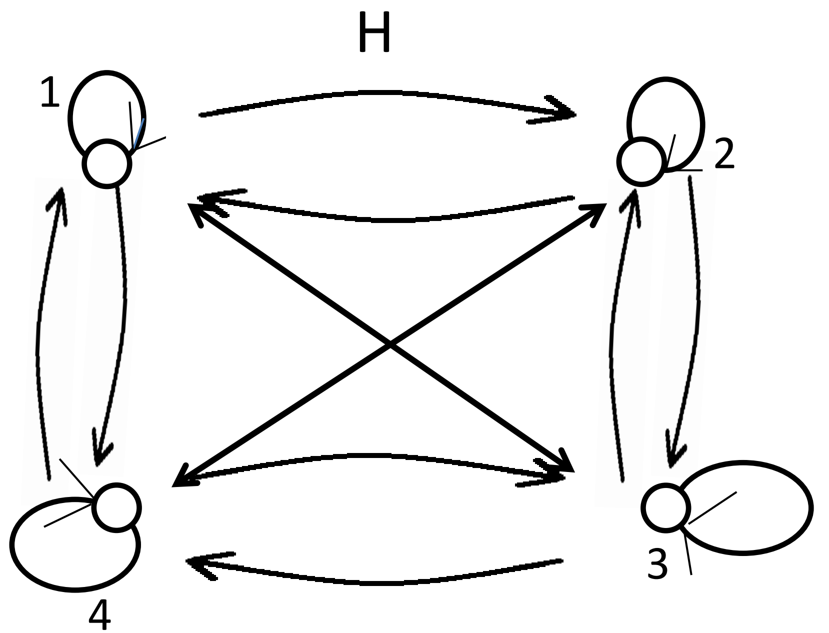




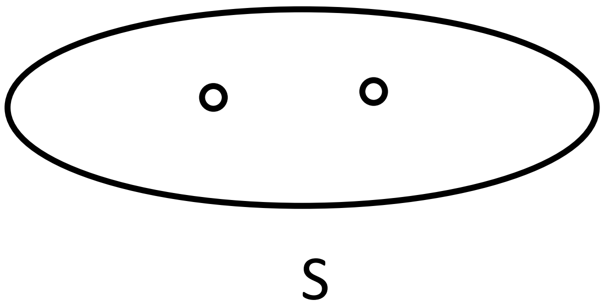
Dos casos particulares:

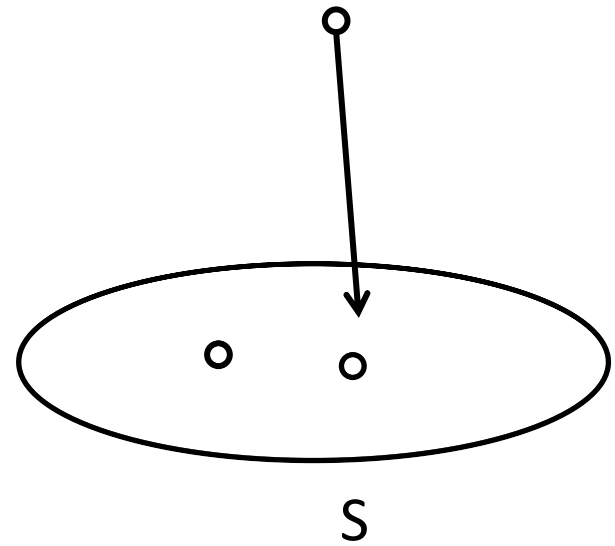






Núcleos en Digráficas:





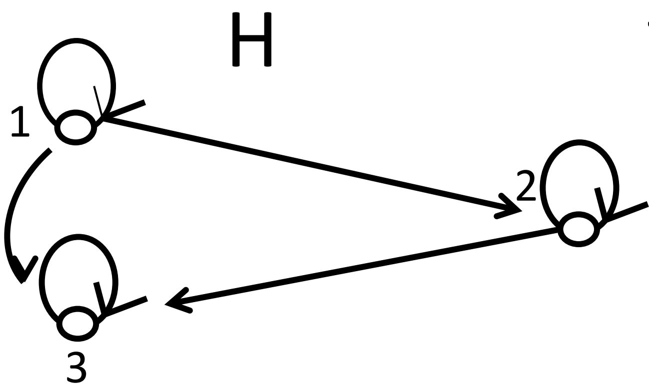
J Von Neumann.

(k,l) – núcleos. M.Kwásnik y Borowiecky

Núcleos por trayectorias monocromáticas (Sands, Sauer, Woodrow)

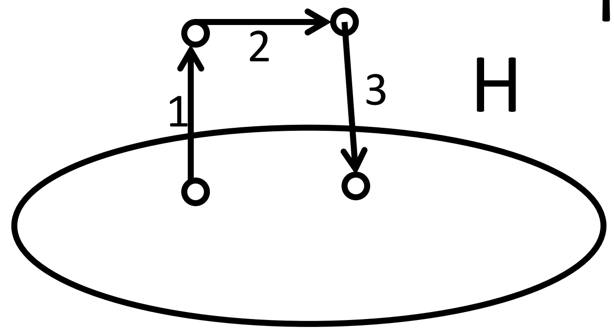
Teorema de Richardson (1953):
Si todo ciclo dirigido de D tiene longitud par, entonces D tiene núcleo.

Dadas dos digráficas, D y H, con D una digráfica H-coloreada

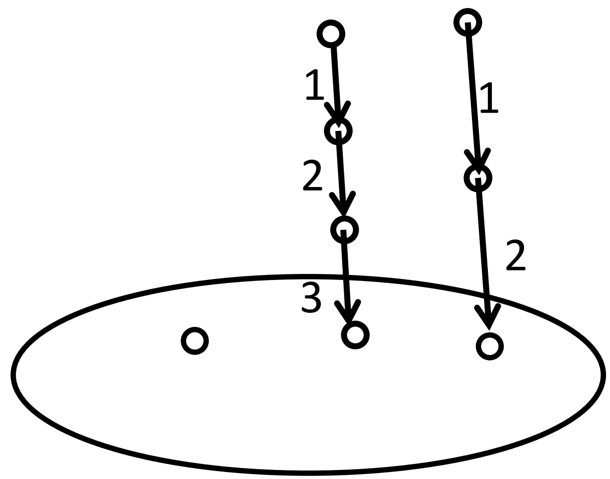


S ⊆ V(D) es H-independiente
(por caminos)

¡NO!

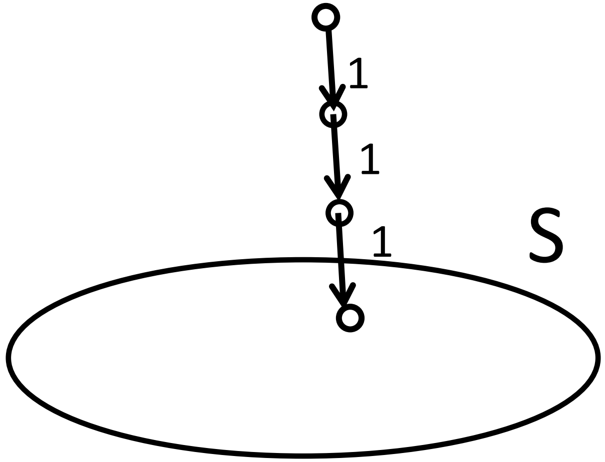


S ⊆ V(D) es H-absorbente
(por caminos)

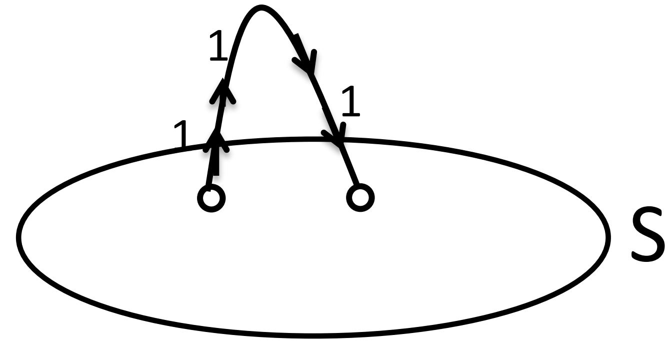


S ⊆ V(D) es un H-núcleo (por caminos)
H-independiente y H-absorbente (por caminos).

Núcleo por trayectorias monocromáticas.

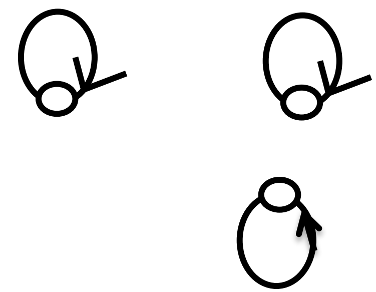


¡NO!



H-núcleo para:

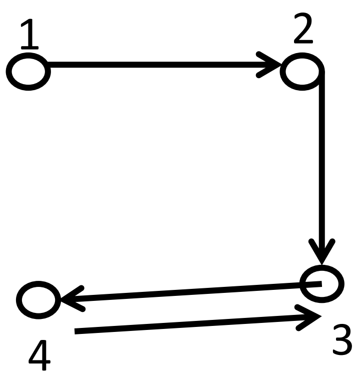
H

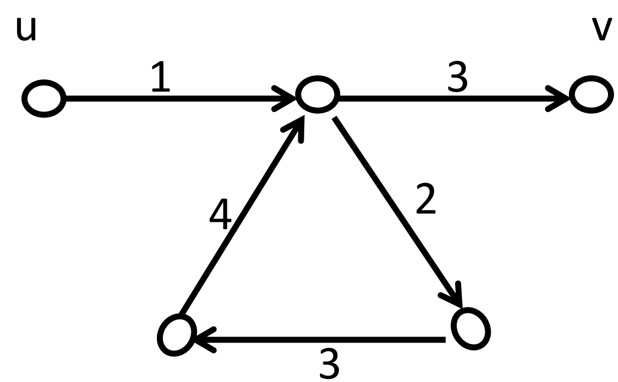


Existe uv $-$ camino dirigido monocromático $\Leftrightarrow$ Existe uv - trayectoria dirigida monocromática

Que exista un uv-H-camino no implica que existe una uv-H-trayectoria

H





D

H- núcleo por trayectorias

H- núcleo por caminos

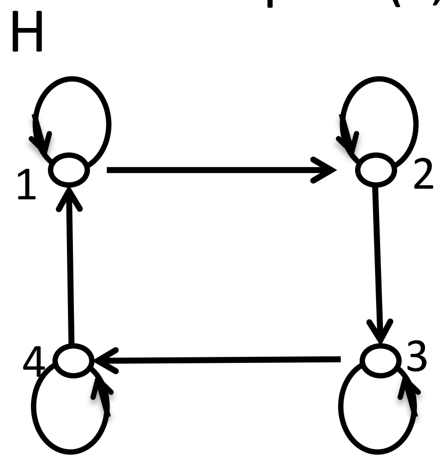
Condiciones suficientes en las digráficas D y H para que la digráfica D tenga un H-núcleo.

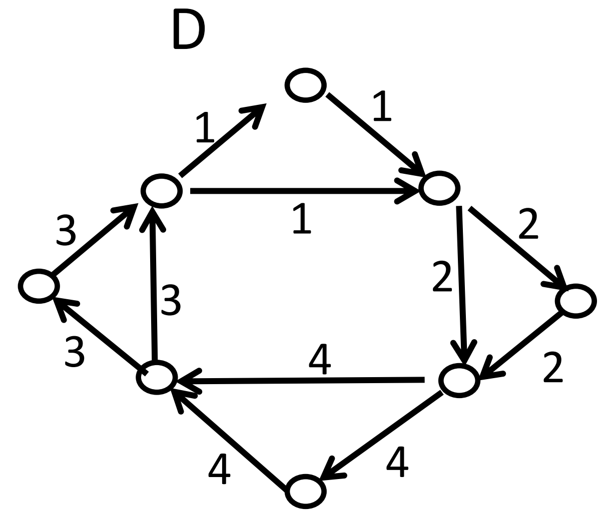
La digráfica de clases de color

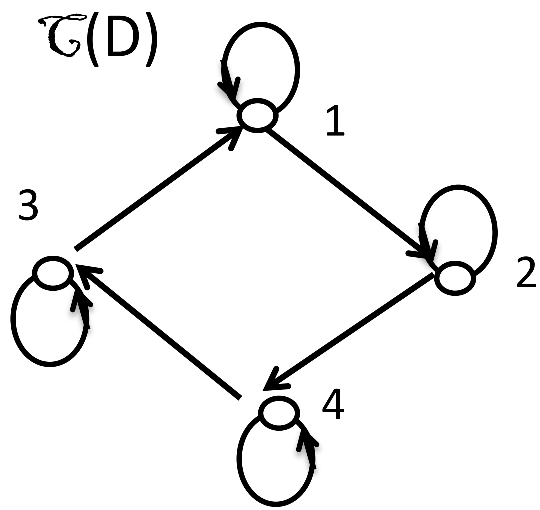
Dada una digráfica H-coloreada D, la digráfica de clases de color, $\mathcal{C}(D)$, está definida como sigue:

$V(\mathcal{C}(D)) = V(H)$

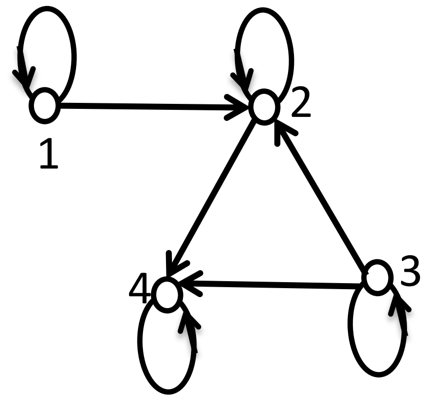
$a \longrightarrow b \in A(\mathcal{C}(D)) \Leftrightarrow \exists\, (x,y)$ y $(y,z) \in A(D)$ tal que $c(x,y) = a$, $c(y,z) = b$.



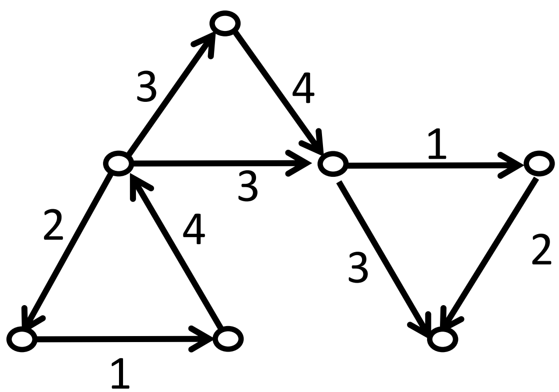




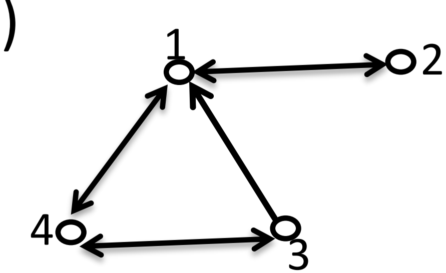
H



D

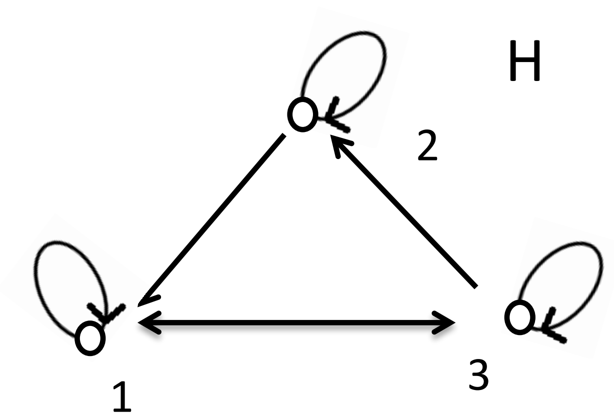


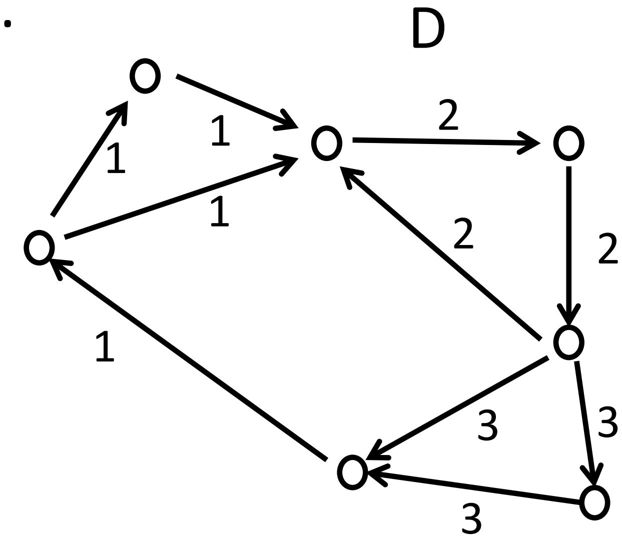
$\mathcal{T}(D)$

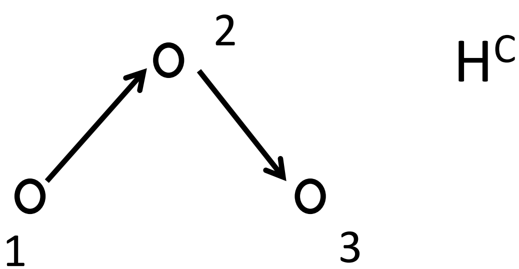


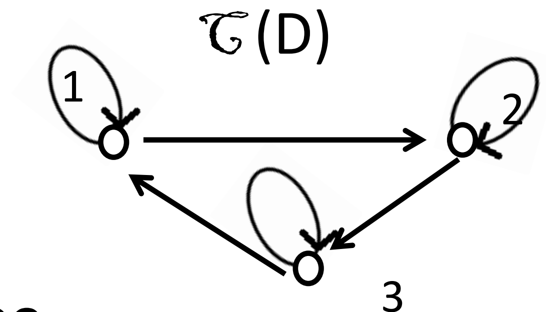
Teorema(H.G. y Rocío Sánchez 2015)

Si todo ciclo dirigido en $\mathcal{C}$(D) tiene un número par de flechas en H^C, entonces D tiene un H-núcleo.





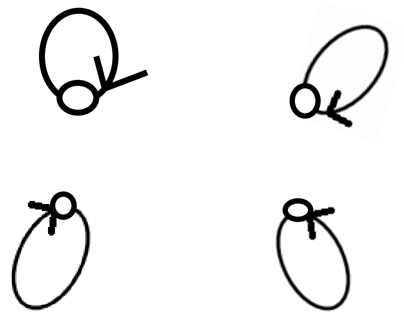




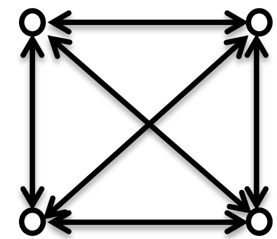
tiene un H-núcleo

Caso monocromático

H



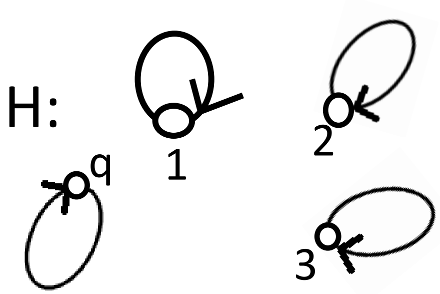
H^C



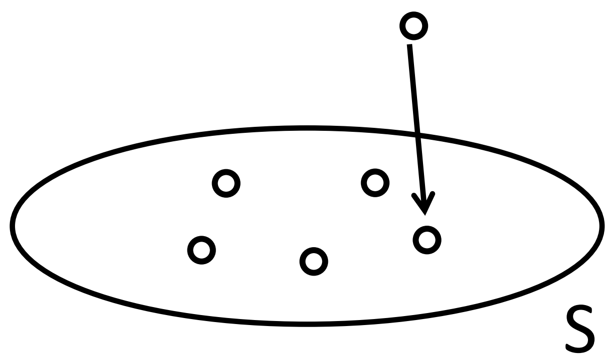
Si todo ciclo dirigido en $\mathcal{C}(D)$ tiene longitud par, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

D es coloreado por: Tomar un color por cada flecha.

H:



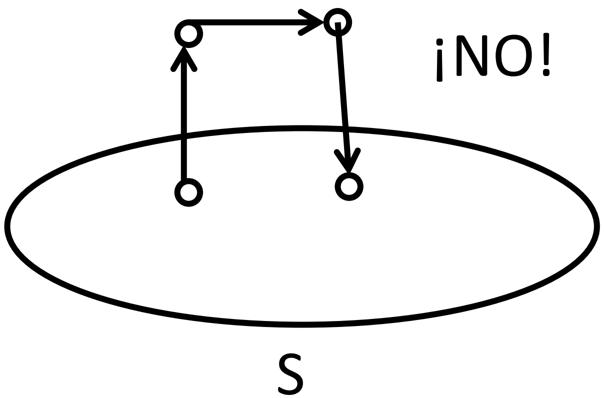
$\mathcal{C}(D) = L(D)$

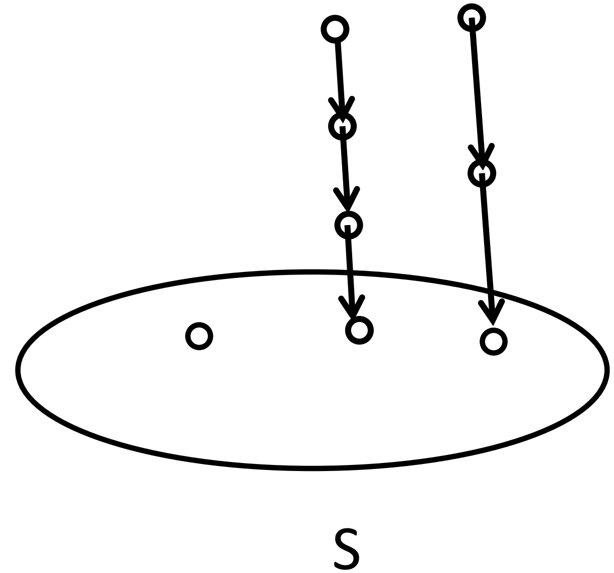


Si todo ciclo dirigido en L(D) tiene longitud par, entonces D tiene núcleo.

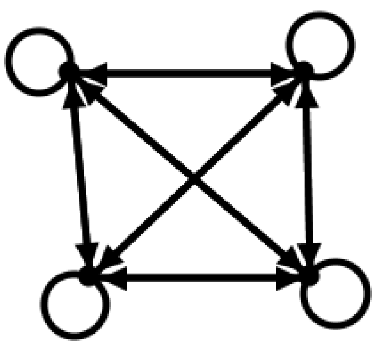
Teorema de Richardson (1953):
Si todo ciclo dirigido de D tiene longitud par, entonces D tiene núcleo.

Claude Berge 1973: Toda digráfica tiene un núcleo por trayectorias dirigidas (respectivamente, caminos dirigidos)





H



Para toda digráfica D, y para toda H – coloración de F(D), D tiene un H – núcleo por caminos.

1982 Sands, Sauer, Woodrow

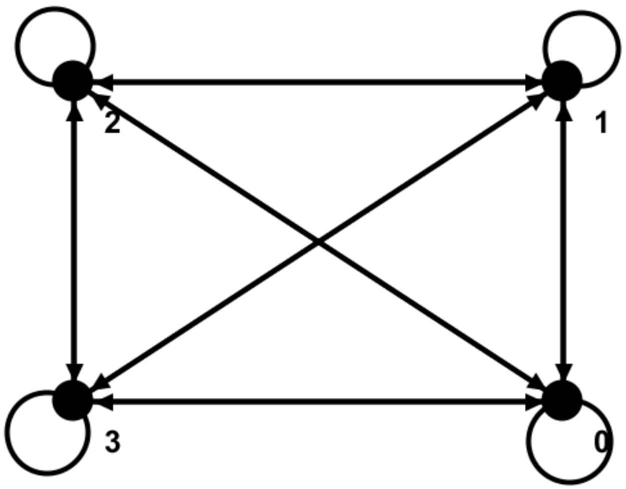
Toda digráfica 2-coloreada tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

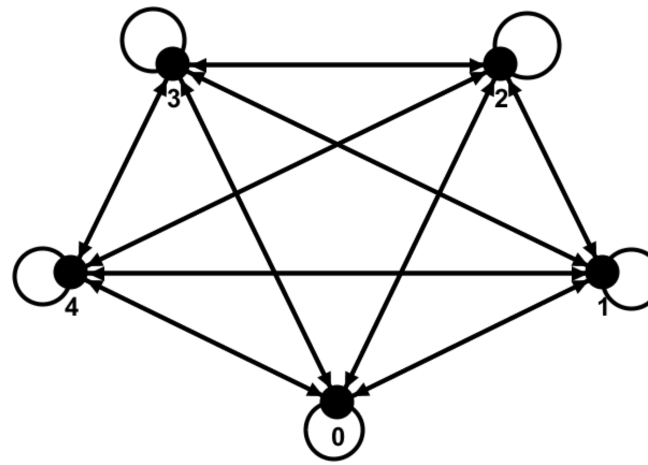
H

Para toda digráfica D, y para toda H-coloración de D, D tiene un H núcleo por caminos.

2007 P. Arpin y V. Linek

B_3: H tal que para cualquier digráfica, D, y para cualquier H-coloración de F(D), D tiene un H núcleo por caminos.

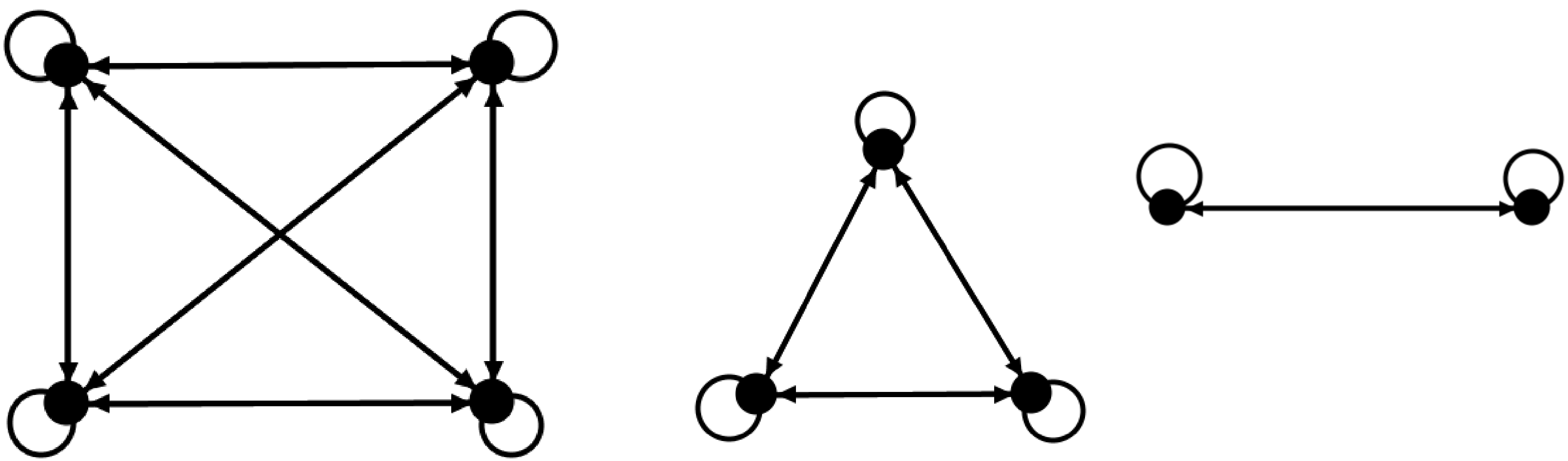




Una digráfica en B_3 será llamada un patrón pancromático.

Ejemplos:

1) Las digráficas completas son patrones pancromáticos. Probado por C. Berge, 1973.

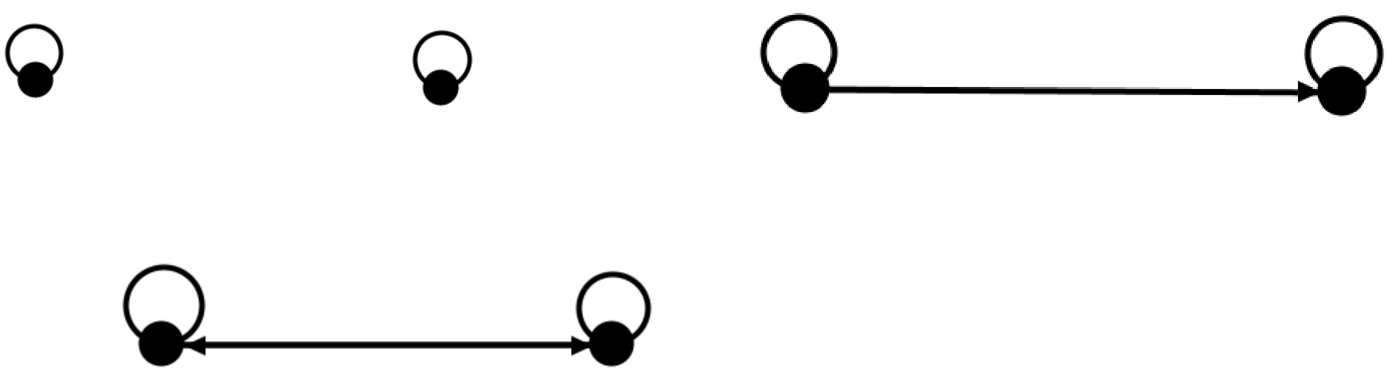


2)

Probado por Sands, Sauer y Woodrow, 1982.

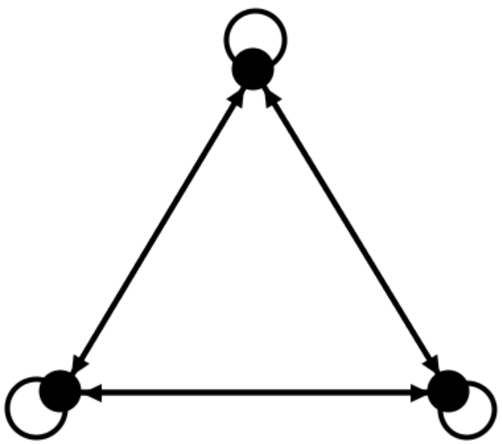
3) Arpin y Linek, 2007:

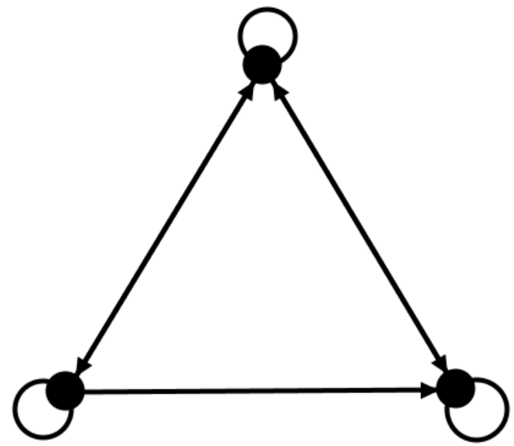
Toda digráfica con dos vértices y con lazos es un patrón pancromático.

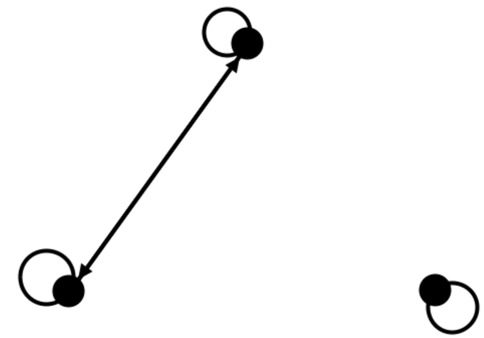


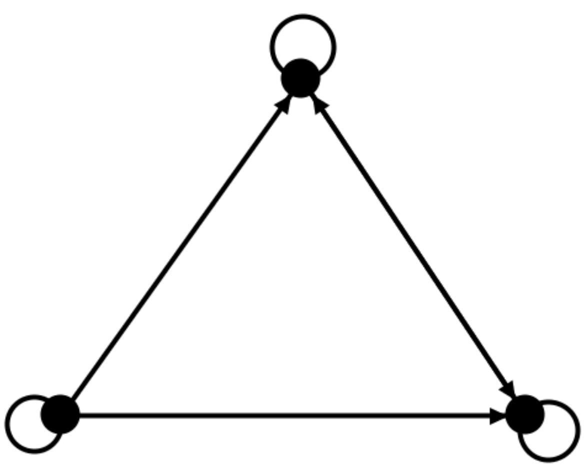
Patrones pancromáticos de orden 3:

A. y L.:



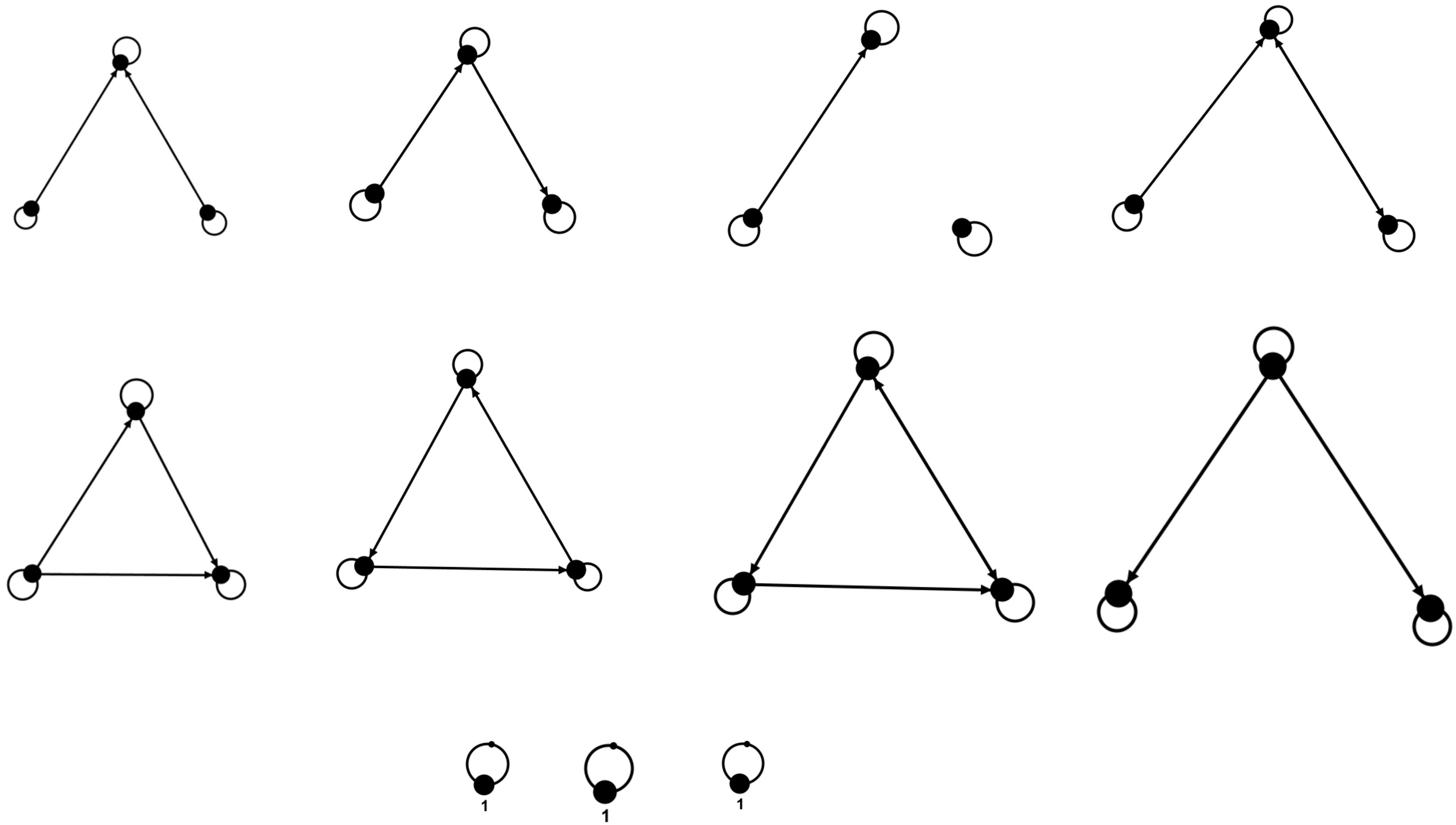




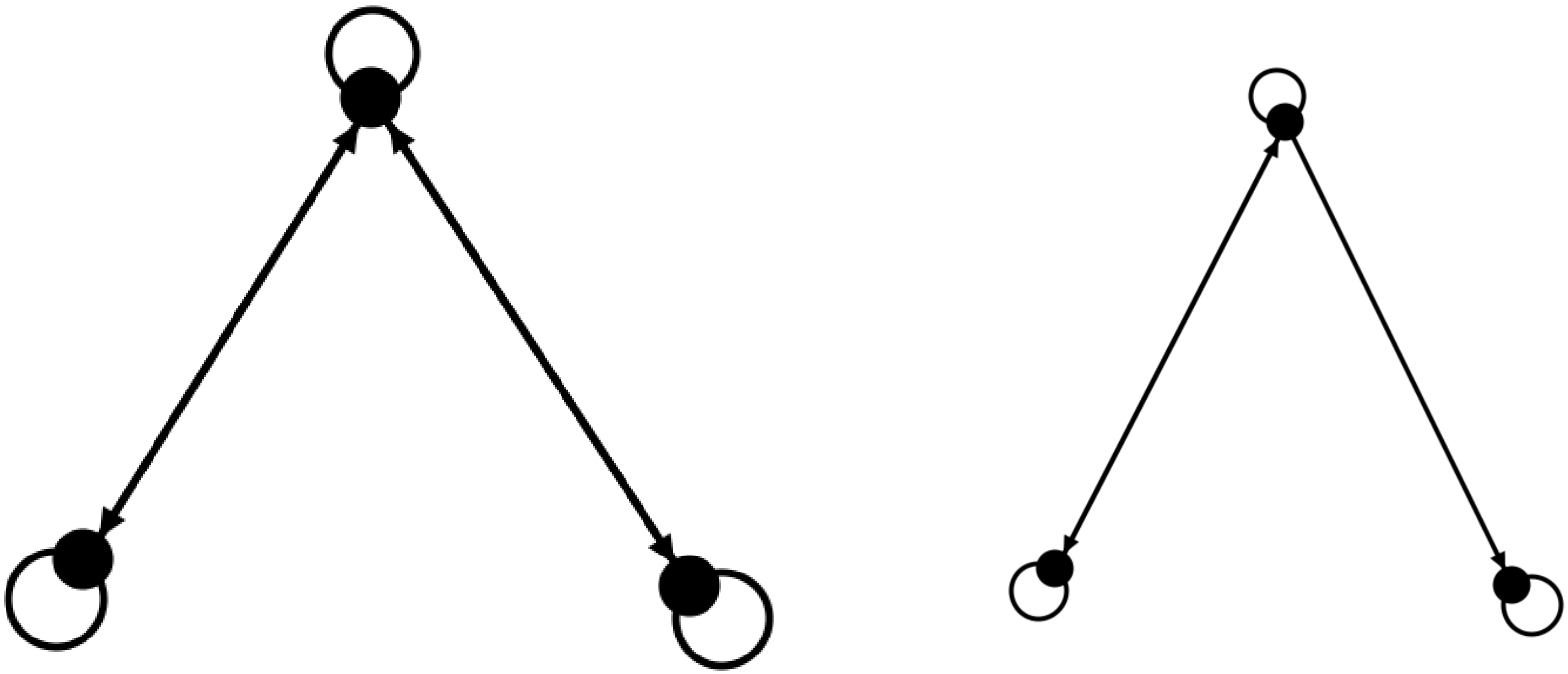


A. L., 2007:

Ejemplos de Digráficas con 3 Vértices que no son Patrones Pancromáticos:

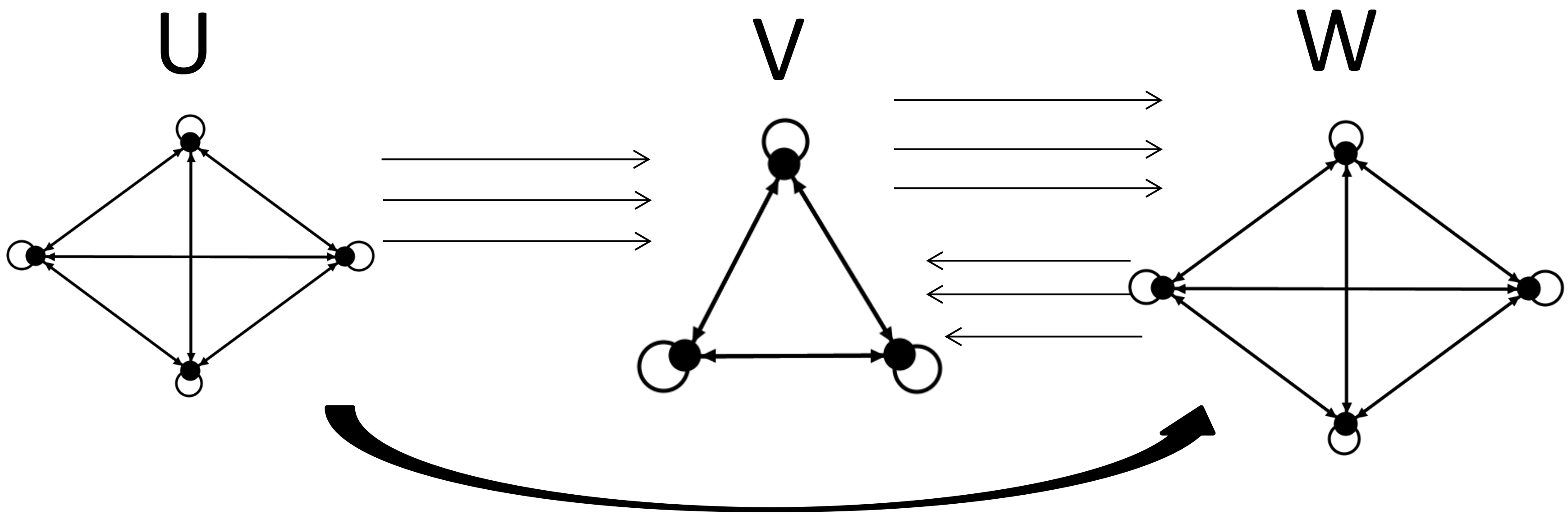


¿Son éstas patrones pancromáticos? (A. L., 2007)

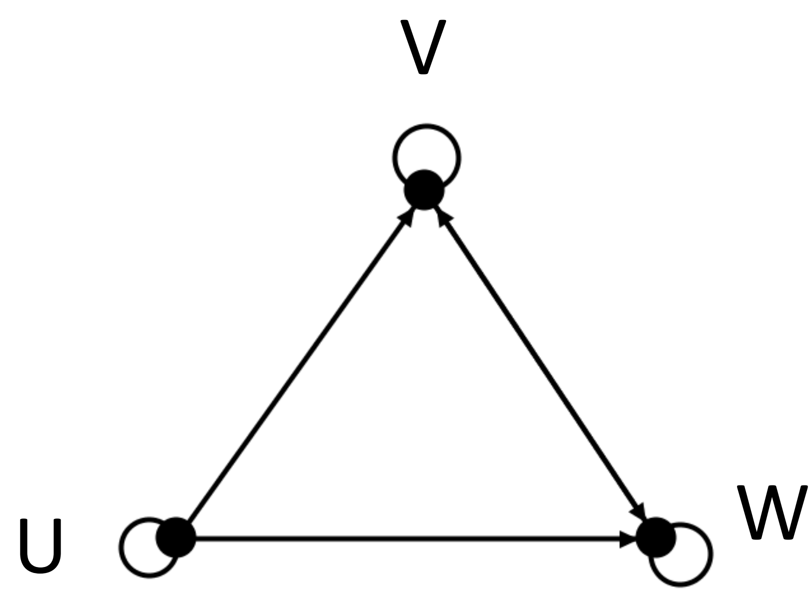


No lo son: H. G. and R. S., 2015

La contracción de una digráfica G.



La contracción de G



Algunas propiedades de B_3 (A. L., 2007):

1) Si $D \in B_3$, entonces todo vértice tiene un lazo.
2) Si $D \in B_3$, entonces toda subdigráfica inducida de D también está en B_3.
3) Sea D' una contracción de D. Entonces $D' \in B_3$ si y sólo si $D \in B_3$.

En el mismo artículo, ellos preguntaron por una caracterización de B_3.

La caracterización de B_3.

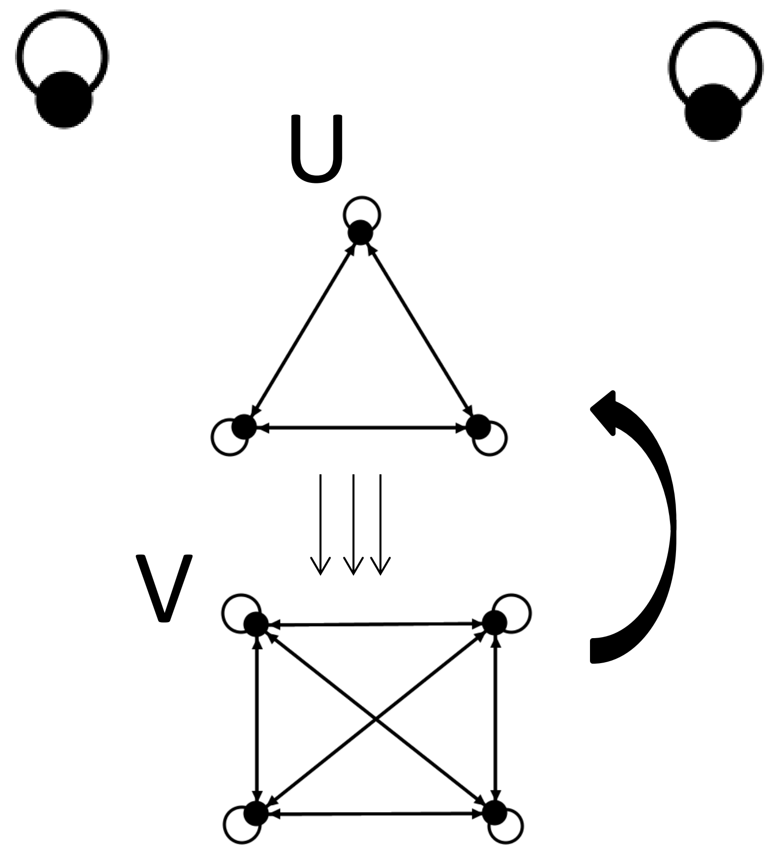
Teorema: G.S., R.S., 2015:

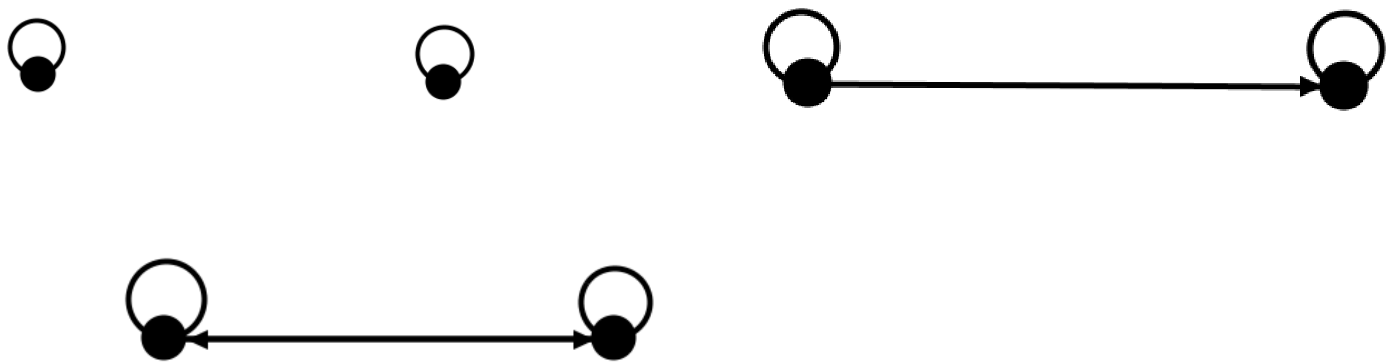
D $\in$ B_3 si y sólo si:

1) D se puede contraer a

Ó

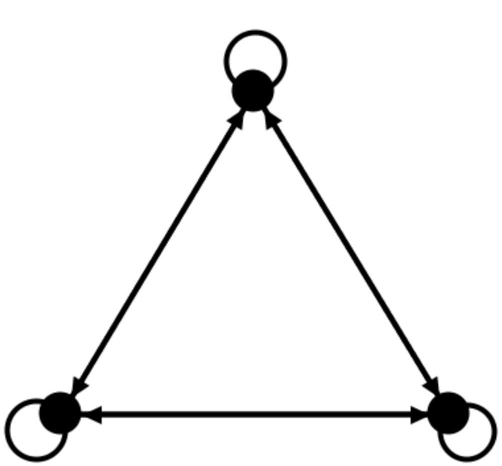
2) D es bicompleta

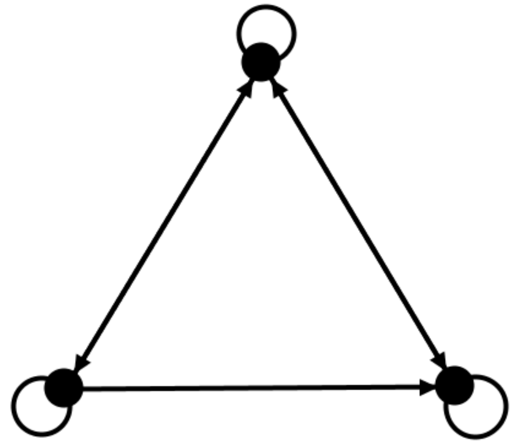


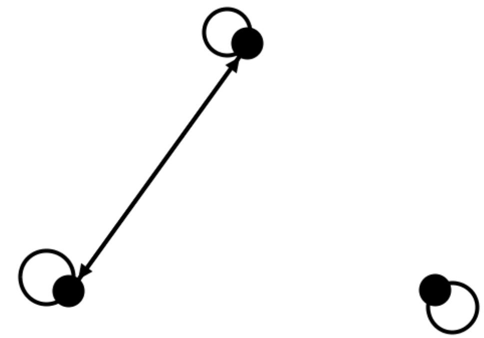


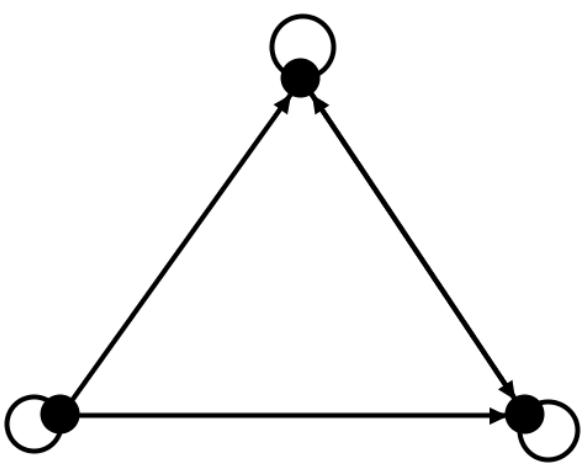
Patrones Pancromáticos de orden 3:

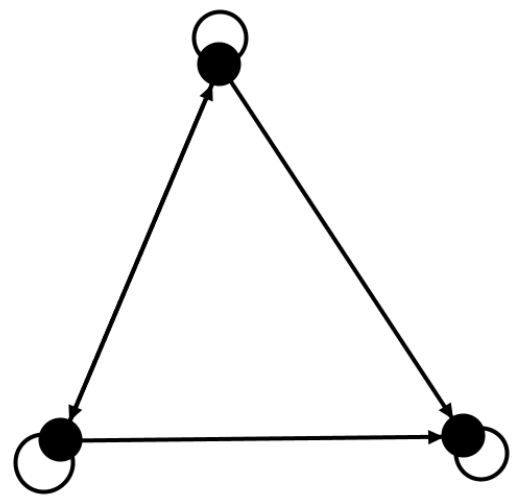
A. and L.:





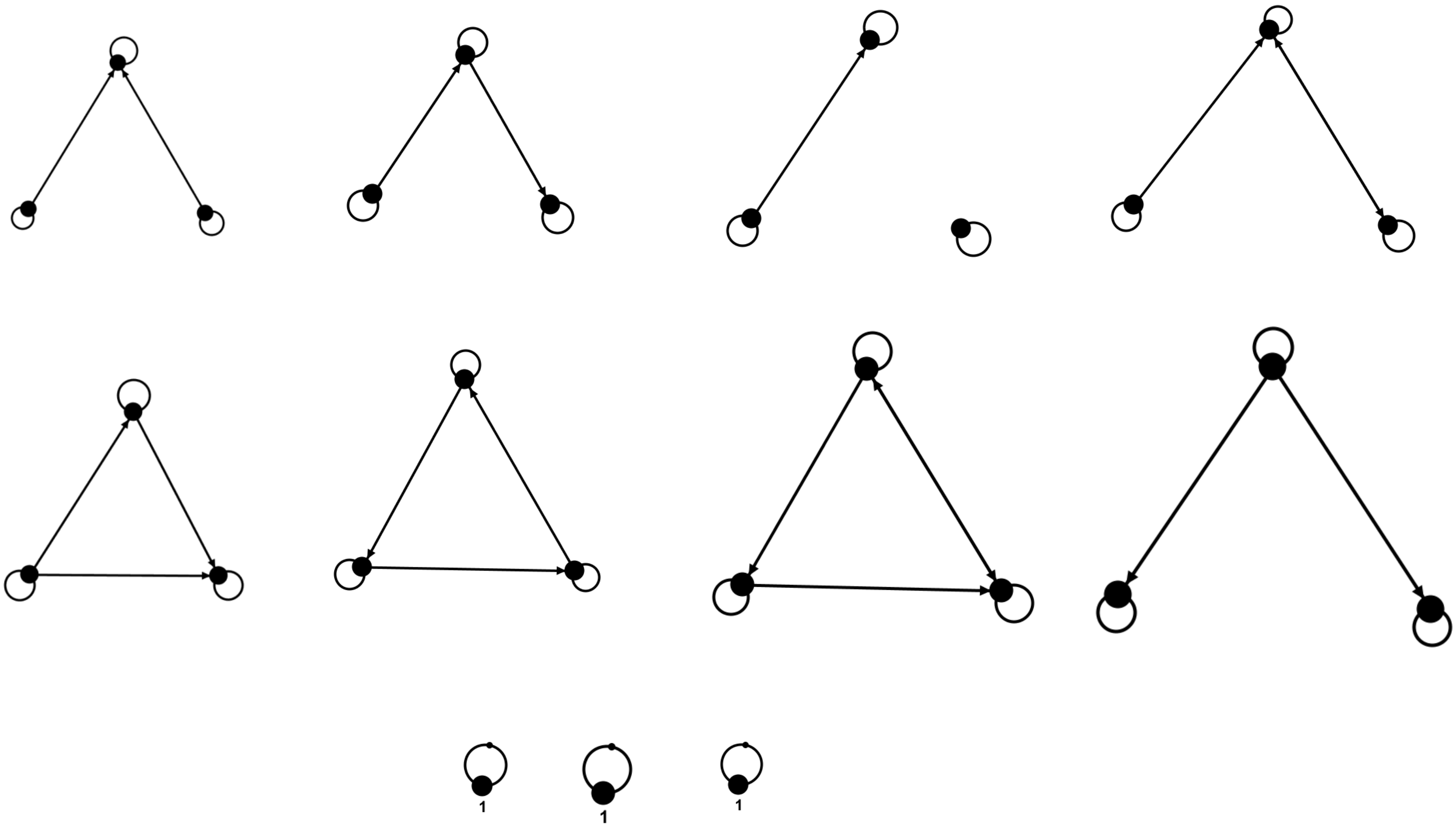






A. L., 2007:

Ejemplos de Digráficas con 3 Vértices que no son Patrones Pancromáticos:



Gracias por su atención.