INSTITUTO

DE

MATEMATICAS

1942-1987

Celebración del 45 aniversario

Memoria

Carlos Bosch
José Antonio de la Peña
Carlos Prieto
Editores

Prefacio

El 30 de junio de 1942 se fundó el Instituto de Matemáticas. Este año celebramos sus cuarenta y cinco años. Con este motivo se organizó un programa de actividades que incluyó la elaboración de esta memoria. En ella se presenta un informe de la actividad desarrollada en el Instituto en los últimos tres años, así como de las áreas que en él se cultivan.

En el Instituto se hace investigación en Algebra, Análisis, Combinatoria, Geometría, Lógica y Fundamentos, y Topología. Investigadores que trabajan en cada una de estas áreas hicieron una presentación de la temática central de ella, mencionando los problemas fundamentales y las contribuciones del Instituto. Se incluyen listas de publicaciones en cada área, básicamente de los artículos aparecidos en los últimos cinco años.

Confiamos en que esta memoria contribuirá a proporcionar un mejor conocimiento de la actividad científica desarrollada en el Instituto de Matemáticas.

Incluimos en al apéndice una reimpresión del Informe General desde la Fundación del Instituto en 1942 hasta 1962, presentado por su director, a la sazón, el Dr. Alfonso Nápoles Gándara.

Finalmente deseamos agradecer a los becarios Alejandro López Ortiz y Sergio Macías Alvarez su valiosa cooperación para lograr la presentación final de esta memoria.

Ciudad Universitaria, noviembre de 1987

Carlos Bosch   José Antonio de la Peña   Carlos Prieto

INVESTIGADORES DEL INSTITUTO

Dr. Marcelo Aguilar González
Dr. Hugo Arizmendi Peimbert
Dr. Raymundo Bautista Ramos
Dr. Carlos Bosch Giral
Dr. Javier Bracho Carpizo
Dr. Alejandro Bravo Mójica
Dra. Ma. Emilia Caballero Acosta
Dr. Humberto Cárdenas Trigos
M. en C. Angel Carrillo Hoyo
Dra. Mónica Clapp Jímenez
Mat. Luis Colavita Ferreyra
Dr. Alejandro Díaz Barriga Casales
Dra. Hortensia Galeana Sánchez
Dr. Adalberto García Máynez
Dr. Octavio García Rodríguez
Dr. José Carlos Gómez Larrañaga
Dr. Xavier Gómez Mont Avalos
Dr. Carlos Gómez Mont Avalos
Dr. Francisco González Acuña
Dr. Carlos Hernañdez Garciadiego
Dr. Alejandro Illanes Mejía
Dr. Miguel Lara Aparicio
Dr. Francisco Larrión Riveroll
Dr. Santiago López de Medrano
Dr. Emilio Lluis Riera
Dr. Roberto Martínez Villa
Dr. Luis Montejano Peimbert
Mat. Rodolfo Morales Martínez
Prof. Víctor Neumann Lara
M. en C. Alejandro Odgers López
Dr. José A. de la Peña Mena
Dr. Salvador Pérez Esteva
Dr. Carlos Prieto de Castro
Dr. Francisco Raggi Cárdenas
Dr. Gerardo Raggi Cárdenas
M. en C. Ana Irene Ramírez Galarza
Dra. Zenaida Ramos Zuñiga
Dr. Félix Recillas Juárez
Dr. Sevín Recillas Pishmish
Dr. José Ríos Montes
Dr. Leonardo Salmerón Castro
Dr. José A. Seade Kuri
Dr. Francisco Tomás Pons
Dr. Guillermo Torres Díaz
Dr. Roberto Vázquez García
Mat. Gonzalo Zubieta Russi

I N D I C E

EL INSTITUTO DE MATEMATICAS
Estado actual y desarrollo en los últimos años

Raymundo Bautista
Director

En este informe se presenta un panorama del estado acutal de Instituto y cuál ha sido su evolución desde 1984.

El Instituto de Matemáticas se fundó hace 45 años, el 30 de junio de 1942. En sus inicios era éste el único centro dedicado al estudio serio de las matemáticas en el país. Desde entonces la investigación ha sido la función sustantiva del Instituto. Sin embargo, como pionero que ha sido, ha asumido además de la investigación la responsabilidad de actuar como difusor de las matemáticas en diversos niveles a todos los ámbitos de México.

A continuación se hará un breve análisis de los diversos aspectos de la actividad del Instituto.

I Actividad Científica

1. Investigación

Durante los últimos años se ha consolidado la tendencia iniciada entre 1981 y 1983, hacia una mayor producción científica y un mayor impacto de la investigación en la comunidad matemática internacional.

Los investigadores y becarios del Instituto han trabajado sistemáticamente y con intensidad para lograr un ambiente propicio para el estudio y la creación matemática. Esto se refleja en la producción científica y en la elaboración de muy buenas tesis de licenciatura, maestría y doctorado.

Sin reducir el número de buenos artículos publicados en los Anales de Instituto de Matemáticas, se ha incrementado sustancialmente la publicación de artículos en las revistas matemáticas más importantes del mundo en cada una de las especialidades que se cultivan en el Instituto. Vemos también la consolidación de líneas de investigación en varias ramas del conocimiento matemático. Nuestro trabajo realizado en estas ramas llama la atención de las escuelas matemáticas más importantes. Esta intensa actividad se refleja en el promedio de artículos por investigador por año que se ha incrmentado de 0.22 en 1982 a 0.45 en 1986 y ya en lo que va de 1987 superó 0.5. Este número es del mismo orden que el de departamentos de matemáticas en buenas universidades en países desarrollados.

Una parte considerable de nuestra actividad científica gira alrededor de los distintos seminarios: es aquí donde se exponen nuevos temas, se discuten resultados obtenidos en el Instituto o en otras instituciones del país y del extranjero. Hay dos clases de seminarios: especializados y generales. De los primeros funcionan regularmente nueve y funcionan cuatro seminarios de carácter más general: el Seminario Especial de Topología y Geometría, el Seminario Especial de Análisis, el Seminario de los Becarios y el Coloquio del Instituto.

Históricamente, la matemática se ha enriquecido y revitalizado gracias a un contacto con otras ramas del conocimiento científico. Estamos haciendo esfuerzos en dirección de una mayor comunicación con otras disciplinas científicas, así como para ampliar el número de temas de matemáticas que se cultivan en el Instituto.

2. Eventos Científicos

Se han organizado varios eventos en colaboración con otras instituciones tanto a nivel nacional como internacional, a saber:

1984

Programa de investigación de del XVIII Congreso Nacional de Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana en Mérida, Yucatán, con 5 conferencias por invitación, 1 del Instituto; 68 reportes de investigación, 21 del Instituto; 73 asistentes, 22 del Instituto.

1985

Primer Taller de Investigación en Topología, Guanajuato,Gto., con 20 asistentes y 15 ponentes de ellos, 2 asistentes y 8 ponentes del Instituto.

Primer Taller de Sistemas Dinámicos, Guanajuato, Gto., con 15 asistentes y 10 ponentes, de ellos, 2 asistentes y 4 ponentes del Instituto.

1986

Primer Coloquio Nacional de Teoría de Gráficas y Combinatoria, Guanajuato, Guanajuato, con 34 asistentes y 17 ponentes, de ellos 5 asistentes y 5 ponentes del Instituto.

II Coloquio Internacional de Sistemas Dinámicos Holomorfos, México, D.F. (1a semana) y Chapala, Jalisco (2a semana) con 120 asistentes y 38 ponentes, de ellos 23 asistentes y 6 ponentes del Instituto.

XIX Congreso Nacional de Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana, Guadalajara, Jalisco, con 145 ponentes, 18 del Instituto.

1987

II Coloquio Nacional de Teoría de Gráficas y Combinatoria, Xalapa, Veracruz.

Jornadas de Análisis y Análisis Numérico en Gunajuato, Guanajuato.

XX Congreso Nacional de Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana, que se celebrará en Xalapa, Veracruz, del 15 al 21 de noviembre.

Taller sobre Representaciones de Algebras y Problemas Matriciales que se celebrará en México, D.F., en noviembre y diciembre.

Destaca el II Congreso Internacional de Sistemas Dinámicos, pues reunió a los mejores matemáticos del mundo dedicados a este tema. Este Congreso fue la culminación de todo un semestre consagrado a los Sistemas Dinámicos, a lo largo del cual hubo una gran actividad en la que estuvo involucrado un numeroso grupo de nuestros becarios.

3. Apoyos a la investigación

(a) Biblioteca

En el trabajo diario del matemático la biblioteca es una herramienta fundamental. Hemos hecho muchos esfuerzos por mantener al día nuestra biblioteca, que es la más antigua y más completa biblioteca de matemáticas del país.

El primer paso para su actualización fue cubrir los rezagos causdos por la crisis del 83. Afortunadamente contamos con la comprensión y el apoyo del CONACyT para remediar esta situación. Gracias a la política de la Universidad de darle prioridad a los acervos bibliográficos, hemos podido mantener actualizada nuestra biblioteca. De 1984 a la fecha hemos adquirido alrededor de 2000 nuevos títulos.

(b) Laboratorio de Cómputo

A partir de 1984 empezamos a adquirir equipo de cómputo para apoyo de la actividad científica, así como para la escritura de textos especializados en matemáticas. Este equipo está también a disposición de los becarios del Instituto.

Nuestro equipo consiste de ocho computadoras y equipo adicional.

(c) Convenios Internacionales

Para un desarrollo sano de las matemáticas en nuestro país es indispensable un amplio intercambio internacional. Hemos tratado de aprovechar al máximo las oportunidades que se han presentado para establecer intercambios con diversos países, intercambios que han sido de gran utilidad para nosotros.

Hemos recibido una valiosa ayuda del Consejo Británico del Reino Unido, del CNPQ de Brasil, del IHES de Francia, del Centro Internacional de Física Teórica de Italia, de la Academia de Ciencias de la Unión Soviética y del DAAD de la República Federal de Alemania.

Tenemos un vigoroso plan de intercambio con diversas Instituciones Cubanas a través de la Academia de Ciencias de Cuba. Mantenemos un intercambio constante con un buen número de Instituciones Nacionales y Extranjeras.

II Docencia

Tradicionalmente el Instituto ha estado muy comprometido con la labor docente en la Facultad de Ciencias en los niveles de licenciatura y posgrado. Los investigadores del Instituto imparten regularmente cursos en la Facultad de Ciencias y en otras Facultades de la Universidad.

Una gran parte de las tesis de licenciatura, maestría y doctorado en matemáticas que se escriben en la Facultad de Ciencias es bajo la dirección de investigadores de Instituto.

El Instituto de Matemáticas y el IIMAS están colaborando con la Facultad de Ciencias para reestructurar el posgrado en matemáticas.

Actualmente tiene el Instituto alrededor de 50 becarios de la UNAM y del CONACyT. Estamos en camino de celebrar convenios con distintas Universidades Estatales con el fin de recibir de esas Universidades becarios del CONACyT y de la Secretaría de Educación Pública.

III Difusión de las Matemáticas

Se ha iniciado, en colaboración con el IIMAS, un esfuerzo para apoyar sistemáticamente a las escuelas de matemáticas en las Universidades estatales. Como un primer paso se organizó en 1987 la 1a Escuela de Verano del Norte en la Universidad Benito Juárez de Durango.

Con el fin de estimular el interés por las matemáticas en todo el país se está llevando a cabo la 1a Olimpiada de Matemáticas organizada por la Sociedad Matemática Mexicana en colaboración con nuestro Instituto y otras instituciones.

Este evento ha tenido amplia difusión a través de los medios de comunicación masiva. Varios investigadores del Instituto han participado en progrmas de televisión en los que se ha hablado tanto de la Olimpiada como de lo que son las matemáticas. En las instalaciones de la Facultad de Ciencias se llevó a cabo la primera etapa del concurso correspondiente al D.F., Estado de México, Hidalgo y Morelos, al cual se inscribieron 1100 estudiantes y se presentaron al examen más de 600.

Investigadores del Instituto organizaron reuniones tanto con profesores como con alumnos de enseñanza media superior con el fin de proponer y resolver problemas matemáticos adecuados al nivel de la Olimpiada Internacional.

Además, se está haciendo un esfuerzo para contribuir a la difusión de las matemáticas por medio de artículos de divulgación.

IV Estructuración Interna del Instituto

El consejo interno se reestructuró de acuerdo con los lineamientos de la nueva Legislación Universitaria. Por otro lado, en sesiones del Consejo Interno y del Colegio de Investigadores se elaboró un nuevo Reglamento Interno del Instituto, que fue aprobado en su oportunidad por el Consejo Técnico de la Investigación Científica.

Desde 1986 se ha estado reorganizando el Colegio de Investigadores del Instituto de Matemáticas.

ALGEBRA

El álgebra se origina como una generalización de la aritmética. La aritmética elemental trata del efecto de operaciones, como la suma y la multiplicación, sobre números dados. Así el álgebra elemental trata de las propiedades de números arbitrarios bajo estas operaciones. En Babilonia, durante la dinastía de Hammurabi (1700 A.C.) se utilizan métodos algebraicos para resolver ecuaciones cuadráticas y cúbicas. Probablemente el primer tratado de álgebra es la Aritmética de Diofanto (200 A.C.), donde se comienza a usar notación especial ("algebraica") para las indeterminadas y algunas operaciones. Durante la hegemonía musulmana el álgebra toma un notable impulso. El trabajo más influyente de este período es el Kitab al-jabr wa al-muqabalah ("la ciencia de la sustitución y la reducción") de al-Khwarizmi. En Europa el nombre de este libro se convirtió en sinónimo de teoría de ecuaciones.

Durante la edad media y moderna, el álgebra se desarrolló principalmente en Italia. A principios del siglo XVI, del Ferro y Tartaglia descubrieron soluciones por radicales para ecuaciones de la forma $x^3 + ax = b$. En 1545, Cardano escribió su Artis magnae, el trabajo algebraico más importante del Renacimiento. A finales de este siglo Viéte introduce notaciones similares a las actuales para el lenguaje algebraico.

La idea de resolver sistemas de ecuaciones lineales por determinantes proviene de Leibniz, aunque ya fuentes chinas contienen algunas indicaciones de estos métodos. La teoría de los determinantes la desarrollan Vandermonde, Laplace, Cauchy y Jacobi a finales del siglo XVIII.

El estudio de ecuaciones no lineales dio un fuerte impulso al álgebra. Cardano había observado ya que para ecuaciones de tercero y cuarto grado el teorema fundamental del álgebra era cierto (una ecuación de grado n tiene n raíces) siempre que se reconociera a los números complejos como posibles raíces, a la par con los números reales. El desarrollo de los números complejos y la primera prueba rigurosa del teorema fundamental del álgebra se deben a Gauss.

El problema central del álgebra del siglo XVIII era encontrar soluciones por radicales para ecuaciones de grado mayor que cuatro. Después de cierto tiempo, el sentimiento de que esto no era posible se extendió entre los matemáticos. En 1803, Ruffini publicó una prueba incompleta de la imposibilidad de resolver este problema. En 1826, Abel dio una prueba que aún contenía algunos errores. La prueba definitiva pertenece a Galois en 1831. En una carta a un amigo, escrita la noche anterior a su muerte en un duelo, Galois esboza las ideas de la teoría de las raíces de ecuaciones en base al nuevo concepto de grupo. La teoría de los grupos permea ahora todos los campos de las matemáticas y de algunas otras ciencias.

El siglo XIX presencia el surgimiento de nuevas ramas del álgebra. Del estudio de curvas algebraicas con el deseo de determinar las cantidades algebraicas que son independientes de la elección de sistemas de coordenadas, surge la teoría de invariantes. Kummer desarrolla la teoría de los números algebraicos y Dedekind introduce la noción de ideal, concepto central en el posterior desarrollo del álgebra. Hamilton introduce los números hipercomplejos, estrechamente relacionados con la teoría de matrices. El desarrollo de la teoría de matrices y el álgebra lineal ha resultado pieza fundamental de las matemáticas y otras ciencias.

En el siglo XX se han desarrollado otras ramas que tienen estrechas vinculaciones entre sí. Esto ha dado origen a la llamada álgebra abstracta, que tiene como problemas centrales los siguientes: (*a*) un problema deductivo, que consiste en desarrollar las propiedades de los sistemas algebraicos que satisfacen una serie de axiomas de naturaleza algebraica. (*b*) un problema de clasificación, que consiste en la construcción y clasificación de todos los objetos que satisfacen una familia de axiomas. Mencionaremos algunos de los sistemas algebraicos así estudiados.

Grupos. Los primeros grupos considerados fueron los grupos de simetrías de objetos geométricos. Para Klein, la geometría era el estudio de las propiedades del espacio invariantes bajo algún grupo de transformaciones. Uno de los grandes logros en la teoría de los grupos es la clasificación de todos los grupos simples.

Algebra lineal. Es la rama del álgebra que se origina del estudio de los sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones. En su desarrollo abstracto dio origen al estudio de los espacios vectoriales y sus transformaciones.

Anillos. Los anillos surgen como una generalización de los enteros para estudiar problemas de divisibilidad y factorización. El primer impulso importante lo reciben de Dedekind. Hilbert desarrolló técnicas basadas en la teoría de ideales para estudiar anillos de polinomios, probando así los famosos teoremas de la base y de los ceros. Noether desarrolló el estudio de los anillos conmutativos, con especial énfasis en los anillos que ahora son llamados noetherianos. Del estudio de los anillos también surgen otras ramas: álgebras, representaciones.

Campos. Aunque su estudio se inicia temprano para casos concretos, solo en 1910, Steinitz propuso un esquema sistemático para clasificarlos. Un aspecto importante de esta rama es la teoría de Galois, que se entiende ahora como el estudio de ciertas extensiones de campos y vincula estrechamente la teoría de campos con la de grupos.

El álgebra tiene conexiones importantes con otras ramas de las matemáticas. En fundamentos a través de la teoría de categorías. En topología, que dio origen al álgebra homológica. En geometría, donde la geometría algebraica y el álgebra conmutativa se encuentran estrechamente vinculadas. En geometría y análisis a través de la teoría de grupos y álgebras de Lie. En otras ciencias el álgebra es también importante: la teoría de grupos en cristalografía y en mecánica cuántica; la teoría de campos en la de códigos, etc.

En México, el álgebra se inició relativamente tarde. Sus iniciadores trabajaban originalmente en otras ramas de las matemáticas: H. Cárdenas y R. Vázquez en topología algebraica, E. Lluis en geometría algebraica. Vázquez trabajó en álgebra homol'ogica, en particular en teoría de módulos proyectivos. Cárdenas y Lluis dieron comienzo al estudio de la cohomología de grupos y los anillos de grupo. Posteriormente también R. Bautista y F. Raggi incursionaron por estos campos. Otros iniciadores del estudio del álgebra en México lo fueron F. Tómas en teoría de los números algebraicos y F. Recillas en los grupos de Lie y el álgebra homológica. Posteriormente, otras personas han trabajado en estos campos, como Z. Ramos en teoría de los números algebraicos. Asimismo, varios nuevos temas han sido abordados por los investigadores del instituto.

A continuación se presenta un breve resumen de los diversos temas de estudio actual, así como de algunos de los avances obtenidos.

J. A. P.

TEORIA DE GRUPOS

A. Díaz Barriga

Dentro del área de teoría de grupos en el Instituto se han dado definiciones de suma activa de grupos y suma activa de grupos pro-C, técnica que parece ser adecuada para trabajar casos no-abelianos. Con estas definiciones ya se han podido generalizar teoremas que son ciertos en el caso abeliano al caso no abeliano, como que todo grupo finito es la suma activa de las envolventes normales de subgrupos de Sylow con sus acciones mutuas, que es una generalización de un conocido teorema. En el caso abeliano, se tiene también un resultado análogo para el caso profinito.

Quedan aún varias preguntas abiertas en esta dirección y aplicaciones a la teoría de campos en las cuales se está trabajando actualmente.

ALGEBRA UNIVERSAL

En México, el estudio del álgebra universal ha sido impulsado por **Octavio C. García**. En este tema han trabajado también otros miembros del instituto, como J. A. de la Peña y F. Larrión.

En 1898, A. N. Whitehead publicó un libro sobre Algebra Universal. De acuerdo a él, el tema se origina con W. R. Hamilton y A. DeMorgan y el título se debe a Sylvester. El término "álgebra universal" tiene todavía esencialmente el mismo significado. El álgebra universal es el estudio de operaciones finitarias en un conjunto y su propósito es encontrar y desarrollar las propiedades comunes de sistemas algebraicos tan diversos como anillos, álgebras booleanas, latices y grupos.

Un concepto importante en álgebra universal es el de variedad. Dado una familia de números naturales $\tau = (n_i)_{i \in I}$, un **álgebra de tipo** τ es una pareja $(A, (f_i)_{i \in I})$ donde A es un conjunto y $f_i : A^{n_i} \to A$ es una operación n_i-aria, $i \in I$. Una **variedad de tipo** τ es una clase de τ-álgebras que satisfacen un conjunto de ecuaciones polinomiales (en las operaciones $(f_i)_{i \in I}$).

En México, el estudio del álgebra universal es motivado originalmente por el libro de Hanna Neumann sobre Variedades de Grupos. En esta dirección se estudian problemas de inyectividad en categorías de grupos y álgebras [García (1979)] y [García-Larrión (1980)]. Posteriormente se estudian otros sistemas algebraicos como latices [de la Peña-García (1982)].

En [García-Taylor (1984)] se estudia una relación importante entre variedades: se dice que la variedad V es **interpretable** en la variedad W (notación $V \leq W$) si para toda V-operación $f_t(x_1, ..., x_n)$ existe un W-término $\alpha_t(x_1, ..., x_n)$ (=polinomio en las W-operaciones) de tal forma que para toda W-álgebra $(A, (g_s)_{s \in S})$ el álgebra correspondiente $(A, (\alpha_t)_{t \in T})$ pertenece a V. El latice obtenido por el orden parcial $\leq$ está siendo estudiado: para variedades de grupos [de la Peña (1985)], para variedades de anillos [Banaschewski-García (1986)] y [García (1987)].

COHOMOLOGIA DE GRUPOS

H. Cárdenas

E. Lluis

En cohomología de grupos se estudió el álgebra con coeficientes enteros del grupo simétrico S_{p^2}. Además se estudian las Clases de Chern de la representación regular del grupo cíclico y de la representación natural del grupo simétrico S_{p^n}. Se continúa en la actualidad el estudio de las clases de Chern de representaciones de grupos finitos y la cohomología de los grupos simétricos con coeficientes enteros.

ANILLOS ASOCIATIVOS

F. Raggi-Cárdenas
J. Ríos M.

El estudio de los anillos asociativos ha tenido varias etapas de desarrollo. Inicialmente se concebían solamente como familias de elementos con las relaciones dadas por las dos operaciones del anillo. Más tarde se definieron los ideales como sigue:

Un ideal izquierdo I de un anillo R es un subconjunto, diferente del vacío, sujeto a las dos propiedades siguientes: (a) Para toda $a, b \in I$, se tiene que $a + b \in I$;

(b) Para toda $a \in I$, $c \in R$, se tiene que $ca \in I$.

La familia de ideales izquierdos de un anillo R posee en forma natural las operaciones de intersección, suma y producto que dotan a esta familia de una estructura de retícula modular con producto. Es por medio de esta retícula que se obtienen resultados muy importantes para los anillos conmutativos.

Posteriormente se adoptó el punto de vista categórico. Para cada anillo R se tiene la categoría de los módulos izquierdos sobre el anillo, ésta se denota como $R - Mod$. De la estructura de esta categoría, se puede deducir información acerca del anillo. Este método ha demostrado ser uno de los más importantes y valiosos para los estudiosos de la teoría de anillos en los últimos cincuenta años. Debemos hacer notar que la máxima limitación del método es que $R - Mod$ sólo nos proporciona información acerca de las propiedades de R que son invariantes bajo las equivalencias de Morita. Por ejemplo, algunas condiciones de $R - Mod$ caracterizan a los anillos noetherianos, pero ninguna condición nos dice cuándo R es conmutativo. La ganancia máxima del método es poder usar las poderosas armas de la teoría de categorías.

Finalmente un ataque interesante y moderno es el que se lleva a cabo por medio de la retícula de teorías de torsión $R - tors$. Las propiedades que posee $R - tors$ la hacen una retícula de Brouwer (también llamadas "Marcos" o "Algebras de Heyting") y los teoremas conocidos para las retículas de Brouwer nos ayudan extraordinariamente en el conocimiento de $R - tors$.

El Instituto de Matemáticas es uno de los pioneros en este campo. El grupo dedicado a éste tema ha publicado alrededor de 15 artículos de investigación acerca de las tecrías de torsión y ha formado gente que trabaja en este campo en otras universidades.

10.

TEORIA DE REPRESENTACIONES DE ALGEBRAS

J. A. de la Peña

En estas breves notas trataremos de presentar un esbozo de las principales contribuciones mexicanas al desarrollo de la teoría de representaciones de álgebras.

Los investigadores del Instituto de Matemáticas que han participado en este campo son:

Raymundo Bautista R.
Luis Colavita F.
José Antonio de la Peña M.
Francisco Larrión R.
Roberto Martínez V.
Gerardo Raggi C. y
Leonardo Salmerón C..

La teoría de representaciones surge del problema de resolver sistemas de ecuaciones lineales. Con el desarrollo del álgebra lineal surgen los conceptos de álgebras y representaciones que dan origen a la moderna teoría de representaciones.

Sea k un campo algebraicamente cerrado. Una **k-álgebra** Λ es un k-espacio vectorial dotado de una multiplicación con unidad, asociativa y bilineal. En general consideramos k-álgebras de **dimensión finita** (que podemos pensar como álgebras de matrices).

Sea Λ una k-álgebra. Un **Λ-módulo** M es un k-espacio vectorial provisto de una acción de Λ en M (esto es, se tiene una función bilineal $\Lambda \times M \to M,(a,m) \mapsto am$ tal que $a(bm) = (ab)m$ y $1m = m$ para $m \in M$). Un Λ-módulo M se llama **inescindible** si no puede descomponerse como $M = M_1 \oplus M_2$, donde M_1, M_2 son Λ-módulos no triviales.

Se dice que el álgebra Λ es de **tipo de representación finito** si admite sólo un número finito de módulos inescindibles (hasta isomorfía). Buena parte del reciente desarrollo de la teoría de representaciones está asociado al problema de la determinación del tipo de representación de una álgebra, así como al estudio de la estructura de las álgebras de tipo finito.

En la historia del desarrollo de la teoría de representaciones se encuentran asociadas los nombres de grandes matemáticos : Hamilton, Pierce, Frobenius, Noether, Koethe, Nakayama, Brauer, Jans, Auslander, Gabriel y otros.

1.Preliminares.

1.1 Sea Λ una k-álgebra de dimensión finita. El **carcaj** (= gráfica orientada)

C_Λ de **Gabriel** de Λ se define como sigue : Sea $S_1, ..., S_n$ un sistema completo de representantes de las clases de isomorfía de los Λ-módulos simples. El conjunto de vértices de C_Λ es $\{1, ..., n\}$ y ponemos $n_{ij} = dim_k Ext^1_\Lambda(S_i, S_j)$ flechas del vértice i al vértice j. Este útil concepto fué introducido por Gabriel en 1972.

El álgebra de caminos $k[C_\Lambda]$ es el espacio vectorial generado por los caminos orientados en C_Λ y con multiplicación dada por : si γ_1, γ_2 son dos caminos en C_Λ, $\gamma_1\gamma_2$ es el camino formado por poner γ_1 a continuación de γ_2, si esto tiene sentido, 0 si no.

Es bien sabido que la categoría de módulos $Mod\ \Lambda$ es equivalente a $Mod\ \Lambda'$, donde Λ' es un álgebra básica, esto es, Λ tiene una descomposición en suma directa de inescindibles que son no isomorfos dos a dos. Podemos entonces suponer que Λ es básica. La importancia de los carcajes se debe al siguiente :

Teorema [Gabriel(1972/1973)]: **Sea Λ una k-álgebra básica de dimensión finita, entonces existe un morfismo suprayectivo $\varphi : k[C_\Lambda] \to \Lambda$ y $ker\varphi$ está generado por caminos de longitud ≥ 2.**

1.2 Un morfismo $f : M \to N$ entre dos Λ-módulos se llama **irreducible** si para toda factorización $f = \mu\theta$, θ es sección o μ es retracción.

El **carcaj de Auslander-Reiten** Γ_Λ de Λ se construye de la siguiente forma: los vértices son las clases de isomorfía $[M]$ de módulos inescindibles M. Se pone una flecha $[M]\to[N]$, si existe un morfismo irreducible $M \to N$.

Sea M un módulo inescindible no proyectivo, existe entonces una sucesión exacta $O \to \tau M \to E \to M \to O$ con la siguiente propiedad : τM es inescindible y para todo irreducible $g : N \to M$, con N inescindible, existe $\mu : N \to E$ sección con $g = f\mu$. Esta sucesión se llama la **sucesión de Auslander-Reiten** y su existencia fue demostrada en Auslander-Reiten(1975).

2.Tipo de representación finito.

2.1 Un álgebra Λ se llama **hereditaria** si todo submódulo de un proyectivo es proyectivo. Si Λ es básica, entonces Λ es hereditaria si y sólo si $\Lambda \xrightarrow{\sim} k[C_\Lambda]$. El primer resultado importante en el desarrollo moderno de la teoría es el siguiente:

Teorema [Gabriel (1972)]: **Un álgebra hereditaria básica es de tipo de representación finito si y solamente si $\Lambda \xrightarrow{\sim} k[C_\Lambda]$ y C_Λ es un diagrama de Dynkin.**

Se dice que Λ es **localmente hereditaria** si cualquier submódulo local de un proyecitvo es proyectivo.

Teorema [Bautista (1981)]: **Sea Λ un álgebra localmente hereditaria. Entonces Λ es de tipo de representación finito si y sólo si para cualquier módulo inescindible M existe un número $m \geq 0$ tal que $\tau^m M$ es proyectivo.**

Este resultado describe un tipo de componentes conexas del carcaj Γ_Λ que jugarán un papel importante en la teoría. Una componente conexa P de Γ_Λ se llama **preproyectiva** si P no tiene ciclos orientados y para todo vértice $[M] \in P$ existe $m \geq 0$ tal que $[\tau^m M]$ es proyectivo.

2.2 En Bautista-Larrión (1982) se introduce la siguiente definición: se dice que el álgebra $\Lambda = k[C_\Lambda]/I$ satisface la condición (S) si para todo vértice x ocurre lo siguiente: si y_1, y_2 son vértices en C_Λ de forma que existen caminos $\gamma_i = \delta_i\alpha_i$ de x en y_i con $\gamma_i \notin I$, α_1, α_2 flechas con $\alpha_1 \neq \alpha_2$, entonces si y_1, y_2 no están conectados por cadenas de caminos en $C_\Lambda \setminus \{x\}$, se tiene que y_1, y_2 se encuetran en diferentes componentes del subcarcaj pleno de C_Λ formado por $\{y \in C_\Lambda :$ existe un camino orientado no trivial en C_Λ de x a $y\}$.

Teorema [Bautista-Larrión 1982)]: **Si Λ satisface la condición (S), entonces Γ_Λ tiene una componente preproyectiva.**

Además, se obtiene un método sencillo para calcular esta componente.

2.3 Siendo las componentes preproyectivas fáciles de calcular, el problema de determinar la finitud del tipo de rerpresentación se resuelve para álgebras con la condición (S). Para tratar casos más complicados se introdujeron las llamadas **técnicas cubrientes** (ver Riedtmann (1980), Bongartz-Gabriel (1982)).

Dada una k-categoría localmente acotada $\tilde{\Lambda} = k[\tilde{C}]/\tilde{I}$, una **cubierta de Galois** $\pi : \tilde{\Lambda} \to \Lambda = k[C_\Lambda]/I$ con grupo G es un morfismo inducido por un morfismo de carcajes $\tilde{C} \to C_\Lambda$ de forma que $\pi(m) = \pi(m')$ si y sólo si existe $g \in G$ con $gm = m'$.

Aunque $\tilde{\Lambda}$ es normalmente infinita, es más sencilla de estudiar que Λ. Se dice que $\tilde{\Lambda}$ es **localmente de tipo finito** si para cada vértice $x \in \tilde{C}$ existen sólo un número finito de inescindibles $M_1, ..., M_s$ (hasta isomorfía) con $M_i(x) \neq 0$.

Terorema [Gabriel (1982) y de la Peña-Martínez (1983a)]: **Dada una cubierta de Galois $\pi : \tilde{\Lambda} \to \Lambda$, Λ es de tipo de representación finito si y sólo si $\tilde{\Lambda}$ es localmente de tipo finito.**

2.4 En Riedtmann (1980) se define la **cubierta universal** $\tilde{\Gamma}_\Lambda$ de un carcaj de Auslander-Reiten Γ_Λ con Λ de tipo de representación finito. Se dice que Λ es **simplemente conexa** si $\tilde{\Gamma}_\Lambda \xrightarrow{\sim} \Gamma_\Lambda$. Se tiene:

Teorema [Bautista-Larrión Salmerón (1983)]: **Sea Λ de tipo de representación finito. Entonces Λ es simplemente conexa si y sólo si Λ satisface la condición (S).**

Posteriormente, en de la Peña-Martínez (1983b) se introduce una construcción de la **cubierta universal $\tilde{\Lambda} \xrightarrow{\pi} \Lambda$ del álgebra** $\Lambda = k[C_\Lambda]/I$. Si Λ es **estándar** (este es simpre el caso si $char(k) \neq 2$) esta construcción no depende del ideal I y coincide con la dada en Bretscher-Gabriel (1983). Se tiene:

Teorema [de la Peña-Martínez (1983b)]: **Sea Λ de tipo de representación**

finito. Entonces Λ es simplemente conexa si y sólo si $\Lambda \xrightarrow{\sim} \tilde{\Lambda}$.

2.5 Una **base** B del álgebra Λ se llama **multiplicativa** si dados $b, b' \in B$, entonces $bb' \in B \cup \{0\}$.

En de la Peña-Martínez (1984) se prueba que si Λ es estandard, entonces Λ tiene una base multiplicativa.

El resultado general fue demostrado poco después y es uno de los teoremas importantes de la teoría de álgebras de tipo finito.

Teorema [Bautista-Gabriel-Roiter-Salmerón (1985)]: **Sea Λ álgebra de tipo de representación finito, entonces Λ tiene una base multiplicativa.**

3.Tipo de representación infinito.

3.1 Sea Λ una k-álgebra de dimensión finita. Para cada $d \in \mathbb{N}$ sea $i(\Lambda, d)$ la cardinalidad del conjunto de clases de isomorfía de los Λ-módulos inescindibles de dimensíon d. Se dice que Λ es de **tipo acotado** si existe $d_0 \in \mathbb{N}$ tal que $i(\Lambda, d) = 0$ para $d \geq d_0$. Se dice que Λ es de **tipo fuertemente no acotado** si existe una sucesión $d_0 < d_1 < d_2 < \ldots$ tal que $i(\Lambda, d_n)$ es infinito para toda n. En Jans (1947) se dan dos **conjeturas** atribuidas a **Brauer** y **Thrall**. Probar estas conjeturas resultó una fuente de motivación en el desarrollo de la teoría. Podemos ahora enunciarlas como teoremas.

Teorema [Roiter (1968) y Auslander (1974)] **Brauer-Thrall I:**
Toda álgebra de tipo acotado es de tipo de representación finito.

Teorema [Bautista (1985) y Bongartz (1985)] **Brauer-Thrall II:**
Toda álgebra de tipo infinito es de tipo fuertemente no acotado.

Para Brauer-Thrall II apareció una demostración en Nazarova-Roiter (1973), sin embargo este trabajo es sumamente confuso y siempre se encontró fuera de las líneas principales de la teoría.

3.2 Una álgebra Λ se llama **mansa** si para cada dimensión d existe una familia de Λ-$k[x]$ bimódulos $N_1, \ldots, N_l$ que son $k[x]$-libres y tales que todo Λ-módulo inescindible de dimensión d es isomorfo a $N_i \otimes_{k[x]} S$ para alguna i y un $k[x]$-módulo simple S.

Se dice que Λ es **salvaje** si existe una inclusión de las representaciones de carcaj w : en modΛ de forma que es una equivalencia de representaciones sobre la imagen (esta terminología se debe a que la complejidad de la categoría Mod $k[w]$ es enorme).

Por un resultado en Drozd (1979), recientemente mejorado en Crawley-Boevey (1987), toda álgebra de tipo infinito es mansa o salvaje (y no ambas).

Las álgebras mansas han comenzado a ser estudiadas. El primer resultado general que se tiene es el siguiente:

Teorema [Crawley-Boevey (1987) y Bautista (1987)]: **Sea Λ una k-álgebra de dimensión finita. Entonces Λ es mansa si y sólo si para cada $d \in \mathbb{N}$, casi todos los módulos M de dimensión d satisfacen $M \tilde{\rightarrow} \tau M$.**

3.3 La **forma de Tits** q_Λ de Λ se define de la siguiente manera: Sea $S_1, ..., S_n$ un sistema completo de representantes de las clases de isomorfía de Λ-módulos simples. Entonces $q_\Lambda : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ es la forma cuadrática

$$q_\Lambda(z) = \sum_{i=1}^{n} z(i)^2 \; - \; \sum_{i \neq j} z(i)z(j) dim Ext^1_\Lambda(S_i, S_j) \; + \; \sum_{i \neq j} z(i)z(j) dim Ext^2_\Lambda(S_i, S_j).$$

Para tipo de representación finito se tiene :

Teorema [Bongartz (1982)]: **Sea P una componente preproyectiva de Γ_Λ. Entonces Λ es de tipo de representación finito si y sólo si q_Λ es debilmente positiva ($i.e.$ $z \in \mathbb{N}^n, q(z) > 0$).**

Decimos que los **proyectivos** de Λ son **aceptables** si se encuentran en componentes $\mathcal{P}, \mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_l$ con $\mathcal{P}$ preproyectiva, $\mathcal{C}_i$ tubo estable insertado y si $Hom_\Lambda(\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j) \neq 0$ con $i \neq j$ se tiene $Hom_\Lambda(\mathcal{C}_j, \mathcal{C}_i) = 0$. Para tipo manso hemos probado:

Teorema [de la Peña-Tomé (1987)]: **Sea Λ con proyectivos aceptables. Entonces Λ es de tipo manso si y sólo si q_Λ es débilmente semipositiva ($z \in \mathbb{N}^n, q(z) \geq 0$). Además , se construyen todas las álgebras mansas con proyectivos aceptables.**

Hay otras familias de álgebras cuyo tipo de representación puede caracterizarse por medio de la forma de Tits, por ejemplo las extensiones en un punto de álgebras mansas ocultas (= álgebras mínimas de tipo infinito con una componente preproyectiva) [de la Peña(1987)].

4.Otras direcciones

4.1 Sea Λ una k-álgebra. Para $A, B \in mod\Lambda$,denotamos por $P(A, B)$ el conjunto de morfismos de A en B que se factorizan por proyectivos. La categoría cociente $\underline{mod\Lambda}$ tiene por morfismos $\underline{Hom}_\Lambda(A, B) = Hom_\Lambda(A, B)/P(A, B)$.

Se dice que Λ y Λ' son **establemente equivalentes** si $\underline{mod\Lambda} \tilde{\rightarrow} \underline{mod\Lambda'}$.

En Martínez (1980) se describen las álgebras establemente equivalentes a Λ si Λ es de tipo finito y Γ_Λ no tiene ciclos orientados. Un resultado importante en esta dirección es :

Teorema [Martínez(1986)]: **Si Λ y Λ' son establemente equivalentes y de tipo de representación finito, Λ y Λ' tienen el mismo número de simples no proyectivos.**

4.2 Sea R un dominio conmutativo local, completo y noetheriano, con $\mathcal{M}$ como ideal máximo tal que $k = R/\mathcal{M}$ es algebraicamente cerrado.

Sea Λ una R-álgebra finitamente generada, básica e indescomponible como anillo. Se muestra que Λ es de la forma $\Lambda \tilde{\to} R[C_\Lambda]/I$ o bien $\Lambda \tilde{\to} R[C_{\tilde{\Lambda}}]/\tilde{I}$, donde $\tilde{\Lambda} = \Lambda/\mathcal{M}$

Teorema [Raggi-Salmerón(1986)] : **Si R no es artiniano, Λ es hereditaria si y sólo si R es de valuación discreta y C_Λ es un ciclo orientado.**

Sea e_x el camino trivial en el punto $x \in C_\Lambda$. Entonces $R_x = e_x \Lambda e_x$ es un anillo.

Teorema [de la Peña-Raggi(1986)] : **Supongamos que C_Λ no tiene ciclos orientados. Entonces $gldim\Lambda < \infty$ si y sólo si $n = max\{gldimR_x \mid x \in C_\Lambda\} < \infty$. Además, $gldim\Lambda \leq n + nl + l$, donde l es la máxima longitud de caminos en C_Λ.**

4.3 Otros temas que han sido estudiados en la teoría de representaciones de álgebras son : problemas matriciales y BOCSes [Bautista-Colavita-Salmerón (1980)], álgebras 1-Gorenstein y conjuntos parcialmente ordenados [Bautista-Martínez (1979)], existencia de ciclos orientados en el carcaj de Auslander-Reiten de álgebras de tipo de representación finito [de la Peña (1983) y (1985)], epimorfismos de álgebras de tipo de representación finito [de la Peña-Gabriel (1987)].

Referencias de autores extranjeros

Auslander, M: Large modules over artin algebras en **Algebra, topology and categories** Academic Press (1976), 1-17.

Auslander, M y Reiten, I: Representation theory of Artin algebras III, Comm. alg. **3** (1975), 239-294.

Bongartz, K: Algebras and quadratic forms, J. London Math. Soc. **28** (1983), 461-469.

Bongartz, K: Indecomposables are standard, Comment. Math. Helv. **60** (1985), 400-410.

Bongartz, K y Gabriel, P: Coverings in representation theory, Invent. math. **65** (1982), 331-378.

Crawley-Boevey, W W.: On tame algebras and BOCS. Preprint. Liverpool (1987).

Gabriel, P: Unzerlegbare Darstellungen I, Manuscripta math. **6** (1972), 71-103.

Gabriel, P: The universal cover of a representation finite algebra, en **Representation theory** Springer LNM 903 (1981), 68-105.

Nazarova, L A y Roiter A: Categorical matrix problems and the Brauer- Thrall conjecture. Preprint. Kiev (1973).

Riedtmann, Ch: Algebren, Darstellungenköcher, Ueberlagerungen und zurück, Comment. Math. Helv. **55** (1980), 199-224.

16.

Roiter, A: The unboundedness of the dimension of the indecomposable representations of algebras that have an infinite number of indecomposable representations, Izv. Akad. Nauk. S.S.R. **32** (1968), 1275-1282.

[1] BAUTISTA, R., AUSLANDER, M., PLATZECK, M.I., REITEN, I., ALMOST SPLIT SEQUENCES WHOSE MIDDLE TERM HAS AT MOST TWO TERMS, CANAD. J. MATH. (1979) 942-960.

[2] BAUTISTA, R., ON ALGEBRAS CLOSE TO HEREDITARY ARTIN ALGEBRAS, AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1981) 21-104.

[3] BAUTISTA, R., INCURSIONES EN TEORIA DE REPRESENTACIONES, APORTACIONES MAT. (1986) 69-114.

[4] BAUTISTA, R., SECTIONS IN AUSLANDER-REITEN COMPONENTS II, AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1980) 157-175.

[5] BAUTISTA, R., CLASSIFICATION OF CERTAIN ALGEBRAS OF FINITE REPRESENTATION TYPE, AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1982) 1-82.

[6] BAUTISTA, R., ON ALGEBRAS OF STRONGLY UNBOUNDED REPRESENTATION TYPE, COMMENT. MATH. HELV. (1985) 392-399.

[7] BAUTISTA, R., IRREDUCIBLE MORPHISMS AND THE RADICAL OF A CATEGORY, AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA DE MEXICO (1982) 83-135.

[8] BAUTISTA, R., TORSION THEORIES AND AUSLANDER-REITEN SEQUENCES, AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1979) 1-19.

[9] BAUTISTA, R., SECTIONS IN AUSLANDER-REITEN QUIVERS, LECTURE NOTES IN MATH. (1979) 74-95.

[10] BAUTISTA, R., ON IRREDUCIBLE MAPS, BULL. AMER. MATH. SOC. (1980) 177-179.

[11] BAUTISTA, R., MESH CATEGORIES FOR TRANSLATION QUIVERS OVER DIFFERENT FIELDS, AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1984) 1-12.

[12] BAUTISTA, R., BRENNER, S., REPLICATION NUMBERS AND WEYL ROOTS, PROC. LONDON MATH. SOC. (3) (1983) 429-462.

[13] BAUTISTA, R., BRENNER, S., ON THE NUMBER OF TERMS IN THE MIDDLE OF AN ALMOST SPLIT SEQUENCE, LECTURE NOTES IN MATH. (1981) 1-8.

[14] BAUTISTA, R., GABRIEL, P., ROITER, A., SALMERON, L., REPRESENTATION FINITE ALGEBRAS AND MULTIPLICATIVE BASES, INVENT. MATH. (1985) 217-285.

[15] BAUTISTA, R., LARRION, F., AUSLANDER-REITEN QUIVERS FOR CERTAIN ALGEBRAS OF FINITE REPRESENTATION TYPE, J. LONDON MATH. SOC. (2) (1982) 43-52.

[16] BAUTISTA, R., LARRION, F., SALMERON, L., ON SIMPLY CONNECTED ALGEBRAS, J. LONDON MATH. SOC. (2) (1983) 212-220.

[17] BAUTISTA, R., SALMERON, L., PREPROJECTIVE COMPONENTS FOR CERTAIN ALGEBRAS, J. PURE APPL. ALGEBRA (1983) 1-14.

[18] BAUTISTA, R., COLAVITA, L., SALMERON, L., ON ADJOINT FUNCTORS IN REPRESENTATION THEORY, LECTURE NOTES IN MATH. (1981) 9-25.

[19] BAUTISTA, R., SIMSON, D., TORSIONLESS MODULES OVER ONE-GORESTEIN L-HEREDITARY ARTINIAN RINGS, COMM. ALGEBRA (1984) 899-936.

[20] BAUTISTA, R., NONEXISTEN CYCLES, COMM. ALGEBRA (1983).

[21] CARDENAS, H., EL ALGEBRA DE COHOMOLOGIA DEL GRUPO SIMETRICO DE GRADO P(2) BOL. SOC. MAT. MEXICANA, (1965) 1-30.

[22] CARDENAS, H., EL ALGEBRA DE COHOMOLOGIA DEL PRODUCTO COMPLETO DE GRUPO... AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1965) 2-12.

[23] CARDENAS, H., LLUIS, E., EL ALGEBRA DE COHOMOLOGIA DEL GRUPO SIMETRICO S-CUATRO CON... AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1982) 137-188.

[24] CARDENAS, H., LLUIS, E., EXTENSION DEL CAMPO DE COEFICIENTES DE LAS REPRESENTACIONES DE... AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1970) 17-31.

[25] CARDENAS, H., LLUIS, E., REPRESENTACIONES DE LOS GRUPOS ABELIANOS, AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1968) 117-144.

[26] CARDENAS, H., LLUIS, E., EL NORMALIZADOR DEL P-GRUPO DE SYLOW DEL GRUPO SIMETRICO S(PN), BOL. SOC. MAT. MEXICANA (1964) 1-6.

[27] CARDENAS, H., LLUIS, E., ACERCA DE LOS P-GRUPOS DE SYLOW DEL GRUPO PSIMETRICO S(P2), AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1961) 1-7.

[28] DE LA PEÑA, J.A., REPRESENTATION-FINITE ALGEBRAS WHOSE AUSLANDER-REITEN QUIVER IS PLANAR, J. LONDON MATH. SOC. (2) (1985) 62-74.

[29] DE LA PEÑA, J.A., ZERO RELATION ALGEBRAS WITH ORIENTED CYCLES OF NON-INVERTIBLE MORPHISMS, LECTURE NOTES IN MATH. (1986) 256-268.

[30] DE LA PEÑA, J.A., ON INTERPRETABILITY IN VARIETIES OF GROUPS, ALGEBRA UNIVERSALIS (1985) 254-261.

[31] DE LA PEÑA, J.A., ON THE ABELIAN GALOIS COVERINGS OF AN ALGEBRA, J. ALGEBRA, (1986) 129-134.

[32] DE LA PEÑA, J.A., ON OMNIPRESENT MODULES IN SIMPLY CONNECTED ALGEBRAS, J. LONDON MATH. SOC. (POR APARECER).

[33] DE LA PEÑA, J.A., FISCHBACHER, U. ALGORITHMS IN REPRESENTATION THEORY OF ALGEBRAS, LECTURE NOTES IN MATH. (1986) 115-134.

[34] DE LA PEÑA, J.A., GABRIEL, P., QUOTIENTS OF REPRESENTATION-FINITE ALGEBRAS, COMM. ALGEBRA (1987) 279-307.

[35] DE LA PEÑA, J.A., GARCIA, O., LATTICES WITH A FINITE WITMAN COVER, ALGEBRA UNIVERSALIS (1983) 186-194.

[36] DE LA PEÑA, J.A., MARTINEZ, R., AUTOMORPHISM OF REPRESENTATION FINITE ALGEBRAS, INVENT. MATH. 72 (3) (1983) 359-362.

[37] DE LA PEÑA, J.A., MARTINEZ, R., THE UNIVERSAL COVER OF A QUIVER WITH RELATIONS, J. OF PURE AND APPLIED ALG. 30 (1983) 277-292.

[38] DE LA PEÑA, J.A., MARTINEZ, R., A MULTIPLICATIVE BASIS FOR ALGEBRAS WHOSE UNIVERSAL COVER HAS NO ORIENTED CYCLES. J. ALG. 87 No.2 (1984) 389-395.

[39] DE LA PEÑA, J.A.,RAGGI,A.G.,GLOBAL DIMENSION OF ALGEBRAS OVER COMPLETE REGULAR LOCAL DOMAINS,PUBL. PREL. INST. MAT. 126 (1986).

[40] DE LA PEÑA, J.A., SIMPLY CONNECTED ALGEBRAS WHICH ARE MINIMAL NOT TAME CONCEALED, PUBL. PREL. INST. MAT. UNAM No. 132 (1987)

[41] DE LA PEÑA, J.A., TOME, B., ITERATED TUBULAR ALGEBRAS, PREPRINT (1987).

[42] DIAZ BARRIGA, A., ON FINITE GROUPS FROM THE CLOSED NORMAL HULLS... PUBL.PREL.INST.MAT. UNAM (1983) 10.

[43] DIAZ BARRIGA, A., EL GRUPO DE GALOIS Y LOS GRUPOS DE DESCOMPOSICION DE LA CERRADURA... AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1976) 33-78.

[44] DIAZ BARRIGA, A., ROMAN, L., NOTE ON A RESULT OF PUIG-RIBENBOIM, C. R. MATH. REP. ACAD. SCI. CANADA (1985).

[45] GARCIA, O., CONCRETE FUNCTORS AND DUALITY, PUBL.PREL.INST.MAT. UNAM (1985) 18.

[46] GARCIA, O., GRUPOS DE EXPONENTE 4: SUBVARIEDADES DE A(2)A(2), AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1977) 41-74.

[47] GARCIA, O., LARRION, F., INJECTIVITY IN VARIETIES OF GROUPS, ALGEBRA UNIVERSALIS (1982) 280-286.

[48] GARCIA, O., LARRION, F., TAYLOR, W., ON THE LATTICE OF INTERPRETABILITY TYPES OF VARIETIES, AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1982) 189-195.

[49] GARCIA, O., NELSON, E., ON THE NON-EXISTENCE OF FREE DISTRIBUTIVE LATTICES, ORDER (1985) 399-403.

[50] GARCIA, O., POYATOS, F., TRUNKS OF AN A ALGEBRA: THE JORDAN HOLDER AND GREEN THEOREMS IN... AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1983) 17-40.

[51] GARCIA, O., TAYLOR, W., GENERALIZED COMMUTATIVITY, LECTURE NOTES IN MATH. (1985) 101-122.

[52] GARCIA, O., TAYLOR, W., EL RETICULO DE INTERPRETABILIDAD DE W.D. NEUMANN, PUBLIC. SECC. MATEM. VALLADOLID (1984) 57-71.

[53] GARCIA, O., TAYLOR, W., THE LATTICE OF INTERPRETABILITY TYPE OF VARIETIES, MEM. AMER. MATH. SOC. (1984) 125 pp.

[54] GARCIA, O., LARRION, F., INYECTIVITY IN VARIETIES OF GROUPS, PUBL.PREL.INST.MAT. UNAM (1980) 9 pp.

[55] LARRION, F., DIAGRAMAS TAJANTES, APORTACIONES MAT. (1986) 296-306.

[56] LARRION, F., CIBILS, C., SALMERON, L., METODOS DIAGRAMATICOS EN TEORIA DE REPRESENTACIONES, MONOGRAF. INST. MAT. UNAM (1982).

[57] LARRION, F., CIBILS, C., SALMERON, L., METHODES DIAGRAMMATIQUES EN REPRESENTATION D'ALGEBRES DE DIMENSION... PUBL. INTERNES SEC. MATH. UNIV. GENEVE (1983) 63 pp.

[58] LARRION, F., SALMERON, L., ON AUSLANDER-REITEN QUIVERS WITHOUT ORIENTED CYCLES, BULL. LONDON MATH. SOC. (1984) 47-51.

[59] MARTINEZ, R., ALMOST PROJECTIVE MODULES AND ALMOST SPLIT SEQUENCES WITH INDECOMPOSABLE MIDDLE TERM, COMM. IN ALGEBRA 18 No. 12 (1980) 1123-1150.

[60] MARTINEZ, R., THE STABLE EQUIVALENCE FOR ALGEBRAS OF FINITE REPRESENTATION TYPE, COMM. ALGEBRA 13 (5) (1985) 991-1018.

[61] MARTINEZ, R., ALGEBRAS STABLY EQUIVALENT TO FACTORS OF HEREDITARY, LECTURE NOTES IN MATH. 903 (1981) 222-241.

[62] MARTINEZ, R., ALGEBRAS STABLY EQUIVALENT TO NAKAYAMA (ABSTRACT), ABSTRACTS OF PAPERS PRESENTED TO THE A.M.S. APRIL 1981, ISSUE No. 10 Vol. 2 No. 3, p. 340.

[63] MARTINEZ, R., ALEGRAS STABLY EQUIVALENT TO UNISERIAL ALGEBRAS, PUB. PREL. INST. MAT. UNAM No. 84 (1985).

[64] MARTINEZ, R., LA EQUIVALENCE ESTABLE PARA ALGEBRAS DE TIPO DE REPRESENTACION FINITA, APORTACIONES MATEMATICAS (1986) No.2 I: 318-322.

[65] RAGGI, A.G., ZETA FUNCTIONS OF TWO-SIDED IDEALS IN ARITMETIC ORDERS, MATH. Z (1986) 353-382.

[66] RAGGI, A.G., SALMERON, L., QUIVERS FOR ALGEBRAS OVER COMMUTATIVE NOETHERIAN COMPLETE RINGS, COMM. ALGEBRA (1987).

[67] RAGGI, F., RIOS, J., PROPER CLASSES ASSOCIATED TO TORSION THEORIES, COMM. ALGEBRA (POR APARECER).

[68] RAGGI, F., RIOS, J., SUBLATTICES OF R-TORS ASSOCIATED TO PROPER CLASSES, COMM. ALGEBRA (POR APARECER).

[69] RAGGI, F., RIOS, J., ALGUNAS RELACIONES ENTRE ANILLOS SEMIARTINIANOS Y LA TEORIA DE TORSION, AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1983) 41-54.

[70] RIOS, J., SOBRE FILTROS ESTABLES DE GABRIEL VII, PUBL. SEC. MAT. UNIV. AUTONOMA BARCELONA (1983) 41-57.

[71] RIOS, J., ALGUNOS FUNTORES RELACIONADOS CON LA COMPLEXION DE MODULOS RESPECTO... REV. MAT. HISP.-AMER. (4) (1982) 201-219.

[72] SALMERON, L., BASES MULTIPLICATIVAS, APORTACIONES MAT. (1986) 359-365.

[73] SALMERON, L., STRATIFICATION OF FINITE AUSLANDER-REITEN QUIVERS WITHOUT ORIENTED CYCLES J. LONDON MATH. SOC. (2) (1985) 224-230.

ANALISIS FUNCIONAL

Me entristece que personas cultas ni siquiera sepan que mi tema de estudio existe.

P. R. Halmos

Una de las areas que se cultiva en este instituto es la del análisis funcional. Es difícil dar una definición precisa; sin embargo, se podría decir que el análisis funcional es el estudio de espacios vectoriales topológicos y de funciones $\mu : \Omega \rightarrow F$, donde Ω es un subconjunto de E con E y F espacios vectoriales topológicos; además siempre se supone que estas funciones cumplen con ciertas condiciones algebráicas o topológicos.

Así el análisis funcional es una mezcla más bien compleja entre el álgebra y la topología . De hecho es imposible separar el nacimiento del análisis funcional del de la topología general ya que los conjuntos y espacios que han recibido más atención , después de $\mathbf{R}^n$, son los espacios de funciones .

En la gráfica que se encuentra al final de esta presentación se muestra la aparición y las interrelaciones de algunos temas del análisis funcional. Es importante notar que sólo aparecen algunos nombres de los muchos matemáticos relacionados con estos temas ya que por tiempo y espacio sería casi imposible hacerles justicia a todos.

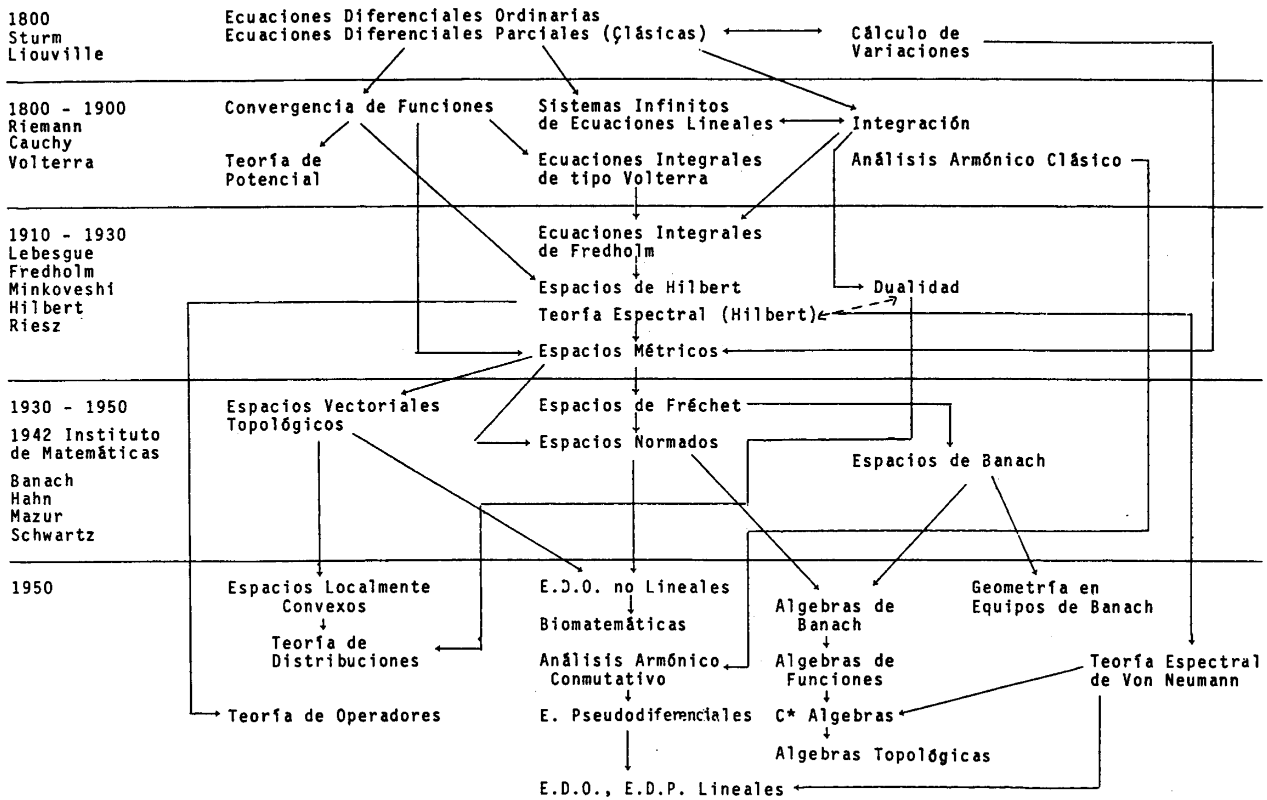
Hay dos temas que se puede decir han sido fundamentales en la evolución de esta rama de las matemáticas : la teoría espectral y la dualidad. Ambos conceptos nacen de la necesidad de resolver el problema concreto de encontrar soluciones de ecuaciones lineales. Respecto a la teoría espectral diremos que los conceptos básicos son los de valor propio, función propia, etc. . Respecto a la dualidad citaremos a H. H. Schaeffer "El estudio de los espacios localmente convexos en términos de su dual es la parte central de la teoría moderna de los espacios vectoriales topológicos...".

Los avances de los últimos 30 años en el análisis funcional se refieren a nuevas e ingeniosas formas de usar las herramientas existentes ya sea en teorías donde no han aparecido anteriormente (K-Teoría, Teoría del índice de Atiyah-Singer, ...) o en la construcción de métodos más poderosos para resolver cierto tipo de ecuaciones (espacios de distribuciones, espacios de Sobolev, ...).

A continuación se encuentra una breve presentación por orden alfabético de los temas de trabajo de los investigadores de este instituto, así como de sus publicaciones. Esta presentación incluye también algunos otros temas afines al ánalisis funcional.

C. B. G.

ANALISIS FUNCIONAL



ALGEBRAS TOPOLOGICAS

Hugo Arizmendi

Las álgebras topológicas son espacios vectoriales topólogicos con una multiplicación asociativa, distributiva y continua. Las álgebras topológicas son una generalización de las álgebras de Banach. Una álgebra topológica puede ser métrica, completa, localmente convexa, etc., si como espacio vectorial topológico tiene esta estructura. En este tema se estudian, entre otras cosas, las propiedades, los conceptos, o las técnicas de las álgebras de Banach que se pueden generalizar a algunas de las distintas clases de álgebras topológicas.

ESPACIO LOCALMENTE CONVEXO Y ESPACIOS DE DISTRIBUCION

Carlos Bosch

Dentro del estudio de los espacios localmente convexos se encuentra el saber como son los conjuntos acotados respecto a las distintas topologías que se pueden dar al espacio. Así uno de los problemas más interesantes es el de saber cómo son los conjuntos acotados en ciertos tipos de límites inductivos (una construcción muy usual en análisi funcional y en otras muchas áreas). Entre los ejemplos más relevantes de este tipo de espacios se encuentran los espacios de distribuciones. Este es otro de los temas de estudio que se está trabajando en este instituto habiendo obtenido resultados en espacios de multiplicadores o de convolución.

PROBABILIDAD

M. E. Caballero

El cálculo estocástico es una herramienta matemática muy poderosa, que se ha desarrollado en los últimos 15 años. Para poder usar y entender este tipo de técnicas es necesario un buen manejo de la teoría general de procesos estocásticos.

Las posibilidades de aplicación del cálculo estocástico son muy variadas, por ejemplo, es básico para la teoría del control, y mediante él se logra plantear modelos adecuados de diversos fenómenos físicos.

Por otra parte hay una interacción muy grande con otras áreas de las matemáticas y se observa un amplio desarrollo de métodos probabilísticos en análisis, teoría diferencial, variable compleja, ecuaciones diferenciales parciales, etc.

En este instituto se está trabajando en la actualidad en desarrollar métodos probabilísticos (ampliamente basados en el cálculo estocástico asociado al movimiento browniano) para obtener nuevos resultados en temas de funciónes enteras y medida armónica.

TEORIA DE OPERADORES

Angel Carrillo
Carlos Hernández

En el Instituto, en el área de la teoría de operadores se estudian fundamentalmente los operadores acotadas definidos en espacios de Hilbert y en espacios de Banach. Se abordan tanto problemas referidos a clases de operadores, como a operadores particulares.

Algunos de los resultados obtenidos se refieren a la determinación de las distintas clases de espectros.

Uno de los problemas clásicos en el área es el de los subespacios invariantes, mismo que permanece abierto, pero a partir del cual han surgido nuevos conceptos y técnicas dentro de la teoría que han permitido dar respuestas parciales al problema y reformulaciones al mismo y además han abierto nuevos temas de investigación, alrededor de algunos de los cuales también se ha trabajado en este Instituto.

Algunos de los problemas específicos en los que actualmente se investiga se refieren a operadores definidos en espacios de dimensión finita, extensión de contracciones relación entre el tamaño del conmutador de dos operadores y la proximidad de éstos a los que conmutan, mismos que además de su interés intrínseco pueden proporcionar información sobre problemas análogos de espacios de dimensión infinita.

BIOMATEMATICAS

Miguel Lara
Santiago López de Medrano

Se trabaja sobre la elaboración de un modelo matemático que simule el origen, la sincronización, la estabilidad, la fase, la disociación, etc. de un ritmo circadiano, tal y como se observa en condiciones de laboratorio. El análisis básico se refiere al estudio de la respuesta de osciladores debilmente acoplados de tipo no lineal (por ejemplo osciladores de Van Der Pol), y a la teoría de bifurcaciones (por ejemplo Andronov, Hopf) y catástrofes.

CONVEXIDAD

L. Montejano

Tanto el "Scottish Book" (problema 19) como en la Colección de problemas de S. M. Ulam se encuentran los siguientes problemas:

Si un sólido de densidad uniforme tiene la propiedad de flotar en equilibrio sin voltearse - en cualquier posición en la que se le deje -, ¿ deberá ser este necesariamente una esfera ?

En particular, cuando la densidad es cero: Si un sólido descansa en equilibrio en cualquier posición en la que se le deje sobre una superficie horizontal, ¿ deberá ser éste una esfera ?

Existe una versión bidimensional de este problema. En este caso, pensamos en un cilindro de densidad uniforme y suponemos que el cilindro tiene la propiedad de que - mientras su eje permanezca paralelo a la superficie del agua - flota en equilibrio, de acuerdo a la Ley de Arquímedes, sin voltearse en cualquier posición en la que se le deje. ¿ Deberá ser este cilindro un cilindro circular ?

En 1938, H. Auerbach estudió el caso cuando la densidad es un medio. Se dio cuenta de que cuando la sección transversal del cilindro es radialmente simétrica entonces el cilindro tiene que ser circular. Sin embargo, y es lo más sorprendente, mostró que en general el cilindro no necesariamente es circular. En 1974, demostré afirmativamente el segundo de los problemas tanto en la versión bidimensional como en el caso general. El primer problema en su versión original es aún un problema abierto.

TEORIA DE INTEGRACION Y ESPACIOS TOPOLOGICOS ORDENADOS

Rodolfo Morales

1. Teorías de la integración de Lebesgue y de Lebesgue-Stieltjes con funciones y medidas valuadas simultáneamente en un álgebra topológica vectorial de Riesz.

Se adaptó, usando el orden parcial, algo de lo que Eilenberg escribió con el orden total para la teoría de la conexidad de espacios topológicos ordenados.

2.Los viejos teoremas de convergencia de Cauchy y de sumabilidad de Euler, Césaro, Hölder, etc. establecidos desde finales del siglo XVIII para sucesiones y series numéricas son también válidos en grupos topológicos. Logré demostrar que es consistente y extensivo el criterio de Toeplitz, el más general que puede haber, aplicado a sucesiones funcionales valuadas en un álgebra de Riesz.

3.Estudio los fundamentos de la geometría propia de un espacio topológico vectorial de Riesz. Como este espacio es un grupo topológico acepta entonces una estructura uniforme que conserva algunas de las propiedades de los espacios métricos.

TRANSFORMADAS INTEGRALES DE DISTRIBUCIONES Y PROBLEMAS INVERSOS

Salvador Pérez Esteva

1.En ciertos espacios de distribuciones se pueden extender las definiciones de las transformadas integrales clásicas: Fourier, Laplace, Hilbert, Mellin, etc., que tienen interés por ser una herramienta poderosa para resolver ecuaciones diferenciales y de convolución (en particular ecuaciones integrales). Una cuestión interesante en este tema es, por ejemplo, caracterizar los espacios de convolución de dichos espacios y relacionar la transformada en cuestión.

2.Otro lema que se ha trabajado en el grupo de Análisis es el de encontrar (si es posible) y estimar una fuente de calor, conociendo (a) la distribución de temperaturas inicial en todo $\mathbf{R}^3$, (b) la temperatura en un intervalo de tiempo $[0, T]$ en uno o varios puntos y (c) considerando que la fuente es de cierta naturaleza.

El problema que resulta en general esta "mal planteado" y su tratamiento es delicado.

LA FORMULA DE LA TRAZA DE SELBERG

Félix Recillas

El trabajo de investigación que me ocupa actualmente está estrechamente ligado a la fórmula de la Traza de Selberg para el caso de un grupo algebraico reductivo G de matrices definido sobre el campo de los números racionales $\mathbf{Q}$: si G es un grupo algebraico anisotrópico, la fórmula de Selberg en su formulación adélica está dada por

$$\sum_{\{r\}} Vol(G(\mathbf{Q})(r)\backslash G(A)(r) \int_{G(\mathbf{Q})(r)\backslash G(A)(r)} f(x^{-1}rx)dx = \sum_{\pi\in G(A)} m(\pi) T_r \varsigma(f)_\pi$$

donde A es el anillo de los adeles de $\mathbf{Q}$, $G(A)$ el correspondiente grupo adelizado, grupo localmente compacto, $f \in C_c^\infty(G(A)$, y $G(\mathbf{Q})$ es un subgrupo discreto de $G(A)$ de tal suerte que el espacio cociente $X = G(\mathbf{Q}) \setminus G(A)$ es un espacio compacto, ς es la representación regular, unitaria de $G(A)$ en el espacio de Hilbert

$$\mathcal{L}^{\Omega}(G(\mathbb{Q}) \setminus G(A))$$

y donde

$$\varsigma(f) = \int_{G(A)} f(y)\varsigma(y)\, dy$$

es el operador de convolución. Como en el caso en consideración (caso compacto) X es un espacio compacto el núcleo del operador $\varsigma(f)$ es de Hilbert-Schmidt; un teorema de Diximier-Mallravin implica que $\varsigma(f)$ es un operador traza (completamente continuo). Esto último a su vez implica que la representación unitaria ς se puede descomponer en una suma discreta de representaciones unitarias irreducibles con multiplicidades $m(\pi)$ finitas ($\pi \in G(\hat{A})$ = dual unitario de $G(A)$). Y así sin mayores problemas la fórmula (1) se obtiene. Si G no es anisotrópica (caso no compacto) el espacio cociente X deja de ser compacto, y la representación ς ya no se puede descomponer en una suma discreta' ς contiene una familia continua de representaciones, por cada subgrupo parabólico P de G, es decir existe un espectro continuo cuyas funciones propias son las series de Eisenstein. Y la fórmula de la traza de Selberg cesa de existir. Para generalizar la fórmula (1) en el caso no compacto J. Arthur ha inventado un método que le permite controlar el fenómeno que a mayor abundancia de subgrupos parabólicos P de G definidos sobre $\mathbb{Q}$, que intersectan a las clases de conjugación en el subgrupo $G(\mathbb{Q})$, más grave es la divergencia de integrales que intervienen en la generalización de la Fórmula de la Traza de Selberg para el caso no anisotrópico. Estoy trabajando esta técnica pues mi idea es que se puede aplicarse a la fórmula de Selberg para el cambio de base para $GL(4)$.

[1] ARIZMENDI, H., MATRIX ALGEBRAS AND M-CONVEXITY, DEMONSTRATIO MATH. (1984) 711-722.

[2] ARIZMENDI, H., CARRILLO, A., SOBRE LOS IDEALES CERRADOS DE L'(T), AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1972) 1-11.

[3] ARIZMENDI, H., LARA, M., TOMAS, F., UNA NOCION ABSTRACTA DETOPOLOGIA COMPACTO-ABIERTA, AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1981) 1-19.

[4] ARIZMENDI, H., ZELAZKO, W., A B-ZERO-ALGEBRA WITHOUT GENERALIZED TOPOLOGICAL DIVISORS OF ZERO, STUDIA MATH. (1985) 191-198.

[5] ARIZMENDI, H., ON THE SPECTRAL RADIUS OF A MATRIX ALGEBRA, PUBL. PREL. INST. MAT. UNAM No. 136 (1987).

[6] BOSCH, C., LA FIGURA ESPECTRAL DE UN OPERADOR CONSTRUIDO A PARTIR DE OTROS I, ACTUALITES MATHEMATIQUES GMEL GAUTHIER (1982) 313-315.

[7] BOSCH, C., HERNANDEZ, C., FALCONI, M., VOREL, Z., ECUACIONES INTEGRALES ORDINARIAS Y FUNCIONALES DE TIPO VOLTERRA, COMUNICACIONES INTERNAS, FAC. CIENCIAS (1978) 1-4.

[8] BOSCH, C., HERNANDEZ, C., FALCONI, M., VOREL, Z., FUNCTIONAL AND ORDINARY INTEGRAL EQUATIONS OF VOLTERRA TYPE, BOL. SOC. MAT. MEXICANA (1978) 34-41.

[9] BOSCH, C., KUCERA, J., DIEUDONNE-SCHWARTZ THEOREM ON BOUNDED SETS IN INDUCTIVE LIMITS II, PROC. AMER. MATH. SOC. Vol. 86 No. 3 (1982) 392-394.

[10] BOSCH, C., DE OTEYZA, E., HERNANDEZ, C., PEARCY, C., SPECTRAL PICTURE OF FUNCTIONS OF OPERATORS, J. OPERATOR THEORY 8 (1982) 391-400.

[11] BOSCH, C., DE OTEYZA, E., HERNANDEZ, C., LA FIGURA ESPECTRAL DEL PRODUCTO TENSORIAL DE DOS OPERADORES, REV. MATEMATICA HISPANO AMERICANA SERIE 4a. TOMO XLII No. 1-2-3 (1983) 15-37.

[12] BOSCH, C., KUCERA, J., MCKENNON, K., DUAL CHARACTERIZATION OF THE DIEUDONNE-SCHWARTZ THEOREM ON BOUNDED SETS, INTERNAT. J. MATH. AND MATH. SCI. Vol. 6 No. 1 (1983) 189-192.

[13] BOSCH, C., KUCERA, J., BOUNDED SETS IN FAST COMPLETE INDUCTIVE LIMITS, INTERNAT. J. MATH. AND MATH. SCI. Vol. 7 No. 3 (1984) 615-617.

[14] BOSCH, C., KUCERA, J., McKENNON, K., FAST COMPLETE LOCALLY CONVEX LINEAR TOPOLOGICAL SPACES, INTERNAT. J. MATH. AND MATH. SCI. Vol. 9 No. 4 (1986) 791-796.

[15] BOSCH, C., KUCERA, J., A NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITION FOR W*-BOUNDED SETS TO BE STRONGLY BOUNDED, PROC. AMER. MATH. SOC. (POR APARECER).

[16] BOSCH, C., KUCERA, J., A NOTE ON THE SPACES O-M AND O'-M, INTERNAT. J. MATH. AND MATH. SCI. (POR APARECER).

[17] CABALLERO, M.E., PROPRIETES DE CONNEXITE EN TOPOLOGIE FINE, D'APRES FUGLEDE, SEMINAIRE DE THEORIE DEL POTENTIEL (1972).

[18] CABALLERO, M.E., GUILLERME, J., SUR UN BALAYEGE INTERIEUR ET LES ENSEMBLES INTERIEUREMENT EFFILES... REND. CIRC. MAT. PALERMO (2)

[19] CABALLERO, M.E., MAJORANTES SURHARMONIQUES MINIMALES D'UNE FONCTION CONTINUE, EN... BULL. SCI. MATH. (2) (1972).

[20] CARRILLO, A., HERNANDEZ, C., SPECTRA OF CONSTRUCTS OF A SYSTEM OF OPERATORS, PROC. AMER. MATH. SOC. (1984) 426-432.

[21] HERNANDEZ, C., A NOTE ON THE SPECTRAL MAPPING THEOREM, STUDIA MATH. (1986) 201-204.

[22] HERNANDEZ, C., LA FIGURA ESPECTRAL DE UN OPERADOR CONSTRUIDO A PARTIR DE OTROS III, (1981).

[23] HERNANDEZ, C., DE OTEYZA, E., LA FIGURA ESPECTRAL DE OPERADORES, MONOGRAF. INST. MAT. (1986) 126.

[24] LARA, M., LOPEZ DE MEDRANO, S., SOBRE EL PROBLEMA INVERSO DEL CALCULO DE VARIACIONES, MEM.SYMPOSIUM MEXICO-U.S.A. EC. DIF.

[25] MORALES, R., INTEGRAL FUNCIONAL Y MEDIDA PROBABILISTICA ESPECTRAL VALUADAS EN UN ALGEBRA NORMADA DE RIESZ, PUB. PREL. INST. MAT. UNAM No. 28 (1981) 16 pp.

[26] PEREZ, S., OPERADORES DE CONVOLUCION PARA LA TRANSFORMACION DE LAPLACE, APORTACIONES MAT. (1986) 32-338.

[27] PEREZ, S., CONVOLUTION OPERATORS FOR THE ONE-SIDED LAPLACE TRANSFORMATION, CASOPIS PEST MAT. (1985) 69-76.

[28] PEREZ, S., CANNON, J.R., VAN DER HOEK, J., GALERKIN PROCEDURE FOR THE DIFFUSION EQUATION SUBJECT TO... SIAM J. NUMER. ANAL. (1987).

[29] PEREZ, S., CANNON, J.R., AN INVERSE PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION, INVERSE PROBLEMS 2 (1986) 395-403.

[30] PEREZ, S., CANNON, J.R., VAN DER HOEK, J., A NOTE ON AN INVERSE PROBLEM RELATED T THE 3-D HEAT EQUATION, INVERSE PROBLEMS ISNM77, BIRKHANSEN (1986).

[31] PEREZ, S., A NOTE ON SOME SPACES L_r OF DISTRIBUTIONS WITH LAPLACE TRANSFORM, INTERNATIONAL JOURNAL OF MATH. AND MATH. SCIENCES (POR APARECER).

[32] PEREZ, S., DUAL ALGEBRAS, ALGEBRAIC OPERATORS AND THE PROPERTY A-n, BOL. SOC. MAT. MEXICANA (POR APARECER).

COMBINATORIA Y TEORIA DE GRAFICAS

La Combinatoria es una parte de las Matemáticas cuyo origen es muy antiguo. La teoría de Gráficas en particular, se inicia con Euler quien resolvió tres importantes problemas gráficos: (*a*) el de los puentes de Königsberg (1736), (*b*) el de recorrer todas las casillas de un tablero de ajedrez con un caballo, sin pasar dos veces por la misma casilla salvo al final del recorrido, el cual debe efectuarse en la casilla de origen (existencia de ciclos hamiltonianos) y finalmente (*c*) el de relacionar el número de aristas, el de vértices y el de regiones en una gráfica plana (fórmula de Euler).

Muchos matemáticos notables han trabajado en Combinatoria. Citemos algunos de ellos: Euler, Cayley, Hamilton, Kuratowski, Menger, Whitney, Ramsey, Erdös, Tutte, etc.

El problema de los 4 colores -resuelto recientemente- es uno de los más famosos problemas matemáticos y su solución llegó después de más de un siglo de esfuerzos por resolverlo.

A partir de 1936 en que apareció el primer tratado de gráficas (König: "Theorie der endlichen und unendlichen Graphen"), la Combinatoria se ha desarrollado impetuosamente y en la actualidad es uno de los troncos más vigorosos y vitales de la Matemática del cual parten muchas ramas: Gráficas, Hipergráficas, Teoría de Ramsey, Método Probabílistico, Diseño de Bloques, Teoría de Matroides, Optimización Combinatoria, Combinatoria Enumerativa, etc., las cuales tienen numerosas conexiones con otras disciplinas tanto puras como aplicadas: Algebra, Topología, Teoría de Juegos, Orden, Investigación de Operaciones, Redes de Comunicación (teléfonica, etc.), Redes de Distribución Eléctrica, Computación, Economía, Biología, Química, Psicología, etc.

En la actualidad hay más de 7 revistas de investigación, de renombre internacional, especializadas en Combinatoria. En México se realiza anualmente, a partir de 1986, un Coloquio Nacional de Combinatoria, Teoría de Gráficas y sus aplicaciones organizado por V. Neumann-Lara y G. Calvillo.

En el Instituto de Matemáticas cultivan esta rama J. Bracho, H. Galeana, L. Montejano y V. Neumann-Lara.

V. N. L.

TEORIA DE GRAFICAS

V. Neumann-Lara

La investigación que se ha realizado por miembros de Instituto dentro de la Teoría de Gráficas es la siguiente:

(1) Coloraciones. El **número dicromático** $\vec{\chi}(D)$ de una digráfica D cuyo concepto fue introducido por V. Neumann-Lara en [18] se define como el mínimo número de colores necesarios para colorear los vértices de una digráfica sin que formen ciclos (dirigidos) monocromáticos. Este concepto generaliza el de número cromático. En [18] se relaciona el número dicromático de D con la existencia en D de ciclos de longitud especial. En [20] se generalizan algunos resultados de [18] y el concepto de número dicromático. En [19] se construyen torneos regulares r-dicromáticos críticos en vértices para $r \geq 2$, $r \neq 4$. En [21] se construyen gráficas orientadas unívocamente m-dicromáticas. En [22] se plantean algunos problemas no resueltos sobre coloraciones. En [23] se investiga una generalización de la conjetura que afirma que el número cromático de un producto de dos gráficas es el mínimo de los números cromáticos de los factores.

En [2] J. Arocha, J. Bracho y V. Neumann-Lara estudian el mínimo número φ_n de hiperaristas que tiene una hipergráfica 3-uniforme con la propiedad de que toda coloración de sus vértices con exactamente n colores deja alguna hiperarista tricromática.

(2) Conexidad. En [11] y [13] se estudian los márgenes cíclicos en gráficas 2-conexas (componentes minimales al quitar los vértices de un ciclo en una gráfica). En [16] y [9] se obtienen importantes resultados que son variaciones del Teorema de Menger. Recuérdese que el Teorema de Menger afirma que si en una gráfica G, dos vértice no adyacentes u y w requieren de la supresión de por lo menos h vértices para quedar en componentes diferentes, entonces existen h trayectorias internamente disjunta que unen a u con w. En [16] se considera una variación para trayectorias de longitud $\leq n$ para n dada. En [9], L. Montejano y V. Neumann-Lara demuestran que si para bloquear todas las uw-trayectorias de longitud $\geq n$ $(n \geq 2)$ en una digráfica D se necesitan remover al menos h puntos, entonces D contiene al menos $\frac{h}{3n-5}$ uw-trayectorias internamente disjuntas.

En [17] G. Calvillo y V. Neumann-Lara determinan las gráficas minimales G para las cuales $G^{=n}$ es conexa ($G^{=n}$ se define en el mismo conjunto de vértices de G de manera que dos de ellos son adyacentes si y sólo si existe una trayectoria en G de longitud n que los une).

(3) Teoría de Núcleos. En [10] V. Neumann-Lara introdujo el concepto de seminúcleo de una digráfica y de R-digráfica y dio una demostración breve del Teorema de Richardson. Los resultados obtenidos [10] han sido importantes en el desarrollo ulterior de la teoría. El contenido de [4], [6], [7] y [8] está reseñado en la exposición de H. Galeana.

(4) K-divergencia en gráficas. $k(G)$ denota la gráfica de clones de G, $k^2(G) = k(k(G))$, etc. Se dice que G es k-divergente si $|V(k^n(G))|_{n\to\infty} \longrightarrow \infty$. En [14] y [15] V. Neumann-Lara estudió las gráficas k-divergentes y encontró una gran variedad de ellas. Los primeros ejemplos conocidos, los m-Octaedros $O_m = mK_2$ $(m \geq 2)$ fueron descubiertos por él mismo.

(5) Cuello. En [12] se construyeron gráficas G que pueden descomponerse en K ciclos hamiltonianos dos a dos disjuntos en aristas, G sin ciclos de longitud menor que c, para $k \geq 1$, $c \geq 3$ dados.

(6) Geometría. Usando técnicas de Teoría de Gráficas, Neumann-Lara y Urrutia demuestran en [24] la existencia de una constante $\alpha > 0$ con la siguiente propiedad: Todo conjunto A de n puntos del plano contiene 2 de ellos u y w tales que todo disco que contiene a u y w , contiene por lo menos αn de puntos de A disjuntos de u y w.

(7) Juegos . En [1] J. Bracho y V. Neumann-Lara estudian una generalización del juego "del quince".

(8) Gráficas de caminos. En [Characterization of n-path graphs and of graphs having n-th root], F. Escalante, L. Montejano y T. Rojano caracterizaron las gráficas y digráficas conexas que tienen raíz n-ésima o que son gráfica de n-trayectorias de otra gráfica. Poco tiempo después, Escalante y Montejano en [Extremal problems concerning n-path connected graphs], volvieron a estudiar la grfica de n-trayectorias de una gráfica.

TEORIA DE NUCLEOS EN DIGRAFICAS

Hortensia Galeana

Un núcleo de una digráfica D es un conjunto de vértices de D que es independiente y absorbente. El concepto de núcleo de una digráfica fue considerado primeramente por Von Neumann en Teoría de Juegos. Posteriormente C. Berge notó que el mismo concepto resultaba de utilidad en muchos contextos y propuso llamarlo el núcleo de una digráfica. En 1944 Von Neumann probó que una digráfica sin ciclos dirigidos posee un núcleo y en 1946 Richardson generalizó este resultado probando que una digráfica sin ciclos dirigidos de longitud impar posee un núcleo, La demostración original de este resultado es larga y complicada. En el año 1971 Víctor Neumann-Lara introdujo el concepto de seminúcleo que permitió una demostración nueva mucho más simple. El concepto de seminúcleo ha sido importante en el desarrollo de la Teoría de Núcleos en Digráficas. Víctor Neumann-Lara y Hortensia Galeana hemos trabajado en la investigación en Teoría de Núcleos de Digráficas a partir del año 1980. Hemos considerado conveniente investigar digráficas minimales sin núcleos a las cuales hemos llamado R^--digráficas; el estudio de las R^--digráficas nos ha permitido obtener algunas condiciones suficientes para que una digráfica tenga núcleo.Estas condiciones generalizan los resultados que se habían obtenido al respecto: "Si todo ciclo de longitud impar tiene dos diagonales cuyos extremos terminales finales son vértices consecutivos del ciclo, entonces la digráfica tiene núcleo".

En 1976 H. Meyniel conjeturó que una digráfica en la que todo ciclo dirigido impar posee dos diagonales tiene núcleo; la falsedad de ésta fue probada por H. Galeana [3] en 1982.

El estudio de la Teoría de núcleos se ha centrado en el estudio de R^{-}-digráficas; de éstas hemos obtenido propiedades importantes respecto a conexidad, número dicromático, parte asimétrica; la imposibilidad de ser caracterizadas por subdigráficas prohibidas y recientemente la estructura de la gráfica subyacente. (ver [3], [4], [5], [6], [7], [8]).

[1] BRACHO,J., NEUMANN, V., THE FUNDAMENTAL PERMUTATION GROUP OF A GRAPH, PUBL. PREL. INST. MAT. UNAM No. 119 (1986).

[2] BRACHO, J., NEUMANN, V., AROCHA, J., PREPUBLICACION.

[3] GALEANA, H., A COUNTEREXAMPLE TO A CONJECTURE OF MAYNIEL ON KERNEL- PERFECT GRAPHS, DISCRETE MATH. 41 (1982) 105-107.

[4] GALEANA, H., NEUMANN, V., ON KERNELS AND SEMIKERNELS OF DIGRAPHS, DISCRETE MATH. 48 (1984) 67-76.

[5] GALEANA, H., A THEOREM ABOUT A CONJECTURE OF H. MEYNIEL ON KERNEL- PERFECT GRAPHS, DISCRETE MATH. 59 (1986) 35-41.

[6] GALEANA, H., NEUMANN, V., ON KERNEL-PERFECT CRITICAL DIGRAPHS, DISCRETE MATH. 59 (1986) 257-261.

[7] GALEANA, H., NEUMANN, V., EXTENDING KERNEL PERFECT DIGRAPHS TO KERNEL PERFECT CRITICAL DIGRAPHS, PUB. PREL. INST. MAT. UNAM No. 71 (1984).

[8] GALEANA, H., NEUMANN, V., ORIENTATIONS OF GRAPHS IN KERNEL THEORY, VERSION PRELIMINAR (1987).

[9] MONTEJANO L., NEUMANN, V., A VARIATION OF MENGER'S THEOREM FOR LONG PATHS, J. COMBINATORIAL THEORY SERIES B Vol. 36 No. 2 (1984) 213-127.

[10] NEUMANN, V., SEMINUCLEOS DE UNA DIGRAFICA, AN. INST. MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO Vol. 11 (1971) 55-62.

[11] NEUMANN, V., ON THE SINGULAR POINTS OF A GRAPH, BOL. SOC. MAT. MEXICANA Vol. 17 No. 2 (1972) 71-75.

[12] NEUMANN, V., K-HAMILTONIAN GRAPHS WITH GIVEN GIRTH, INFINITE AND FINITE SETS, NORTH. HOLLAND (1973) 1133-1142.

[13] NEUMANN, V., PUNTOS c-MARGINALES DE UNA GRAFICA, AN. INST. MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO Vol. 13 (1973) 41-52.

[14] NEUMANN, V., ON CLIQUE DIVERGENT GRAPHS, ALGEBRAIC MATHODS IN GRAPH THEORY, SZEGED, HUNGRIA, NORTH HOLLAND (1978) 563-569.

[15] NEUMANN, V., CLIQUE DIVERGENCE IN GRAPHS, ALGEBRAIC MATHODS IN GRAPH THEORY, SZEGED, HUNGRIA, NORTH HOLLAND (1978) 563-569.

[16] NEUMANN, V., LOVASZ, L., PLUMMER, M., MENGERIAN THEOREMS FOR PATHS OF BOUNDED LENGTH, PERIODICA MATHEMATICA HUNGARICA Vol. 9 (4) (1978) 269-276.

[17] NEUMANN, V., CALVILLO, G., MINIMAL GRAPHS WHOSE N-PATH GRAPHS ARE CONNECTED, AN. INST. MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO Vol. 23 (1983) 1-15.

[18] NEUMANN, V., THE DICHROMATIC NUMBER OF A DIGRAPH, J. COMBINATORIAL THEORY, SERIES B Vol. 33 No. 3 (1982) 265-270.

[19] NEUMANN, V., URRUTIA, J., VERTEX CRITICAL R-DICHROMATIC TOURNAMENTS, DISCRETE MATH. 49 (1984) 83-87.

[20] NEUMANN, V., THE GENERALIZED DICHROMATIC NUMBER OF A DIGRAPH, PROC. OF THE SIXTH HUNG. COMBIN. COLLOQ. (1984) 601-606.

[21] NEUMANN, V., UNIQUELY COLOURABLE M-DICHROMATIC ORIENTED GRAPHS, DISCRETE MATH 62 (1986) 65-70.

[22] NEUMANN, V., VERTEX COLOURINGS IN DIGRAPHS. SOME PROBLEMS, PUBL. PREL. INST. MAT. UNAM No. 97 (1985).

[23] NEUMANN, V., HAGGKVIST, R., HELL, P., MILLER, D., ON THE MULTIPLICATIVE GRAPHS AND THE PRODUCT CONJECTURE, PREPRINT (1985).

[24] NEUMANN, V., URRUTIA, J., A COMBINATORIAL RESULT ON POINTS AND CIRCLES ON THE PLANE. PREPRINT, POR APARECER EN DISCRETE MATH.

GEOMETRIA

La geometría es una de las áreas más antiguas y fascinantes de las matemáticas. Intentar presentar un cuadro general de lo que se estudia en geometría sería ingenuo, por lo que me limitaré a intentar dar una idea general de la geometría en el Instituto de Matemáticas, y aun ahí me limitaré a una descripción un tanto superficial, de lo que se hace en geometría algebraica y diferencial, sin mencionar nada sobre otras ramas de la geometría. A grandes rasgos, los objetos básicos de estudio en la goemetría algebraica y diferencial son ciertos espacios topológicos que admiten un tipo especial de estructura, de variedad algebraica en el primer caso, de variedad riemanniana en el segundo.

La geometría diferencial en el Instituto se inicia con los doctores Alfonso Nápoles Gándara y Alberto Barajas, respetados y apreciados maestros de todos nosotros. Algunos años después, el Dr. Guillermo Torres se interesó en esta área y por muchos años ha sido él quien ha despertado entre los estudiantes el amor por la geometría diferencial. Más recientemente, Ana Irene Ramírez ha estado interesada en este campo y su trabajo es prometedor. En particular, su labor de formación de estudiantes es formidable.

Como lo mencionamos antes, los objetos básicos de estudio en la geometría diferencial son las variedades riemannianas. Esto significa que M es una variedad diferenciable y posee un producto interior, definido positivo, en cada fibra de su haz tangente y que varía diferenciablemente en M. Esto es lo que se conoce como una **métrica riemanniana** g en M. La métrica g nos permite "medir" vectores tangentes a M, lo cual a su vez nos permite medir longitud de curvas en M parametrizadas por un intervalo en $\mathbb{R}$, integrando la norma de su campo tangente. Así obtenemos una métrica en M en el sentido usual: Dados $x, y \in M$, la distancia de x a y, con respecto a la métrica g, es el ínfimo de las longitudes de las curvas que los unen. Las curvas que infinitesimalmente minimizan distancias son llamadas **geodésicas** en (M, g), juegan el papel de las líneas rectas en geometría euclidiana. Una vez que tenemos la métrica g en M, ésta nos permite definir conceptos tales como áreas, curvatura, isometrías, variedades mínimas, etc. Una **superficie de Riemann** es, por definición, una variedad riemanniana de dimensión (real) dos.

La geometría algebraica en el Instituto de Matemáticas nació con el Profesor Solomon Lefschetz, quien pasó largos períodos de su vida en México y fortaleció mucho la geometría, la topología y las ecuaciones diferenciales. Entre la gente que se formó con él está Emilio Lluis, quien realizó importantes trabajos sobre variedades algebraicas con singularidades. Actualmente, destaca la labor de Sevín Recillas, quien además de estar encontrando resultados interesantes sobre curvas algebraicas, es una influencia muy positiva para el recién formado grupo (interinstitucional) de geometría algebraica. En este grupo colaboran, además de Sevín Recillas, Xavier Gómez-Mont, José Seade y Carlos Gómez-Mont quien es una de las más recientes contrataciones del Instituto. El trabajo de Xavier Gómez-Mont es presentado en la sección de Sistema Dinámicos. Esto es una combinación de problemas, ideas y técnicas de geometría algebraica y sistemas dinámicos, siendo mucho de su interés el estudio cualitativo de las soluciones de los campos vectoriales holomorfos en variedades complejas.

Una lamentable, pérdida para el Instituto es la de Socorro Soberón, quien recientemente se fue a residir fuera del país. Socorro trabajaba en problemas de geometría algebraica y diferencial que provenían de la física, más precisamente, del estudio de las soluciones de las ecuaciones de Yang-Mills.

J. A. S.

GRUPOS DE LIE Y SUPERFICIES COMPLEJAS

J. A. Seade

El trabajo que llevo a cabo es una combinación de ideas y técnicas de geometría algebraica y diferencial con topología algebraica y diferencial. Los objetos básicos de estudio son variedades cerradas de la forma $M_\Gamma = \Gamma \setminus G$, donde G es un grupo de Lie de dimensión 3 y $\Gamma \subset G$ es un subgrupo discreto con cociente compacto. Este tipo de variedades han sido estudiadas por los geómetras durante muchos años debido, entre otras cosas, a su estrecha relación con las singularidades de superficies complejas. En efecto, por los trabajos de F. Klein, J. Milnor y otros, sabemos que si G no es isomorfo a $\mathbf{R}^3$, como grupo aditivo ni a $\tilde{E}^+(2)$ (la cubierta universal del grupo $E^+(2)$ de isometrías del plano euclidiano $\mathbf{R}^2$ que conservan la orientación), entonces cualquier variedad M_Γ de la forma $\Gamma \setminus G$ es difeomorfa a la frontera de una vecindad regular V_Γ de una singularidad aislada P en una superficie compleja $\mathcal{V}$. Mi trabajo ha estado enfocado a ahondar esta relación entre los grupos de Lie y las singularidades complejas: se demostró que en ambos casos, existen 3 campos vectoriales en M_Γ linealmente independientes y definidos canónicamente, salvo homotopía; más aún, la correspondencia entre grupos de Lie y singularidades manda unos campos en los otros. Estos campos definen en M_Γ una trivialización $\mathcal{C}$ de su haz tangente, la cual a su vez define una métrica riemanniana, una estructura spin y una estructura de variedad enmarcada. Cada una de estas estructuras es fuente natural de invariantes de G y de Γ. Se han estudiado con detalle algunos de estos invariantes, así como distintas relaciones entre ellos y con los invariantes que provienen de la teoría de singularidades.

CURVAS ALGEBRAICAS

Sevín Recillas

Casi todo el trabajo de investigación realizado a la fecha tiene sus orígenes en la tesis doctoral "A relation betweeen curves of genus 3 and curves of genus 4", Brandeis University, Nov. 1970.

Allí se estudia la relación entre curvas de género 3 y 4 estudiadas a principios de siglo por P. Roth (aparentemente alumno de Wirtinger), y se decribe la aplicación de Prym para género 4 i.e. $P : \tilde{M} \to A_{g-1}$ ($\tilde{M}_g$ = espacio de moduli de cubiertas étales de curvas de genero g y A_{g-1} = moduli de variedades abelianas principalmante polarizadas de dim $g-1$). Se demuestra que la fibra genérica es la variedad de Kummer i.e. $P^{-1}(-J(C)) \cong J(C)/\pm 1$.

Si bien este trabajo no fue publicado, tiene citas, pues fue el primer trabajo moderno en variedades de Prym (definidas por Wirtinger). Aparte de las técnicas usadas, por ejemplo el uso de familias de cónicas allí presentado, da motivo para futuras generalizaciones a familias de cuádricas (e.g. algunos trabajos de Beauville).

Una consecuencia casi inmediata fue el intento de demostrar la racionalidad de $\tilde{M}_4$ usando las técnicas allí propuestas ("La variedad de los módulos de curvas de género 4 es irracional"), problema posteriormente demostrado por F. Catanese. En 1974 se presenta el trabajo "Jacobians of curves with g_4^1 's are the Prym's of trigonal curves" que junto con el caso de quínticas planas y curvas hiperelípticas cierra los posibles casos de variedades de Prym que son Jacobianas. La construcción básica usada en este resultado se conoce ahora como "la construcción trigonal": Esta construcción es de utilidad para dar contraejemplos al teorema de Tonelli para curvas de género ≤ 4 (Beauville) y da motivo para la construcción tetragonal de Donagi que produce contraejemplos en cualquier género.

Después de un período seco, se empieza a trabajar (en colaboración con Del Centina) en curvas de género 4 con la particular mira de expresar la ecuación de Scholtky en términos de la geometría de la curva canónica. Durante este período se incursiona en el estudio de cubrimientos dobles de curvas elípticas-hiperelípticas (tema que aparece implícito en el trabajo de tesis de licenciatura de J. Bracho "La aplicación Prym-canónica") y recientemente se da (en colaboración con Del Centina) una caracterización nueva de curvas elípticas-hiperelípticas en términos de lo que llamamos direcciones asintóticas.

Recientemente (1987) se vuelve a la relación de P. Roth y se estudia el caso particular de curvas elípticas-hiperelípticas que son cubrimientos dobles étales de curvas $e-h$ de género 4 ("On a property of the Kummer variety and a relation between two moduli spaces of curves" en colaboración con Del Centina, por aparecer en los cuadernos del Instituto Matemático Ulisse Diki).

Un punto aislado en mi trabajo es la demostración de que toda curva algebraica que tiene un grupo de automorfismos isomorfo a $Z_2 \oplus Z_2$ tiene morfismos birracionales semicanónicos en ¶^{3}. ("An example of a curve of genus 9 with a half-canonical embedding in ¶^{3}").

SISTEMAS DINAMICOS

Xavier Gómez Mont

Las ecuaciones diferenciales fueron introducidas por Sir Isaac Newton en 1687 como lenguaje para la descripción de su nueva física. La idea fundamental de Newton fue el observar que el movimiento de una partícula sujeta a una ley queda completamente determinado si conocemos la ley para lo infinitamente pequeño :

$$\frac{dx_i}{dt} = F^i(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad i = 1, ..., n.$$

De diversas consideraciones de naturaleza física se deducen las leyes infinitesimales, y el problema que queda es resolver las ecuaciones diferenciales para determinar la evolución del sistema bajo consideración.

Un gran número de matemáticos se dedicaron a resolver las ecuaciones diferenciales provenientes de las diversas ciencias. Sin embargo a pesar de siglos de esfuerzos y algunos éxitos en la solución de clases especiales de ecuaciones, no se había encontrado un método que resolviese la mayoría de las Ecuaciones Diferenciales. Fue el matemático francés Henri Poincaré a finales del siglo XIX el que admitió que la mayoría de las ecuaciones diferenciales no podrían ser resueltas, al menos en la forma como las querían resolver sus contemporáneos : expresando las soluciones en términos de funciones conocidas.

Poincaré propuso una solución a este problema al interesarse más por una descripción de naturaleza geométrica-topológica del conjunto de las soluciones de la ecuación diferencial. Con esta idea, nacieron la teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales y los Sistemas Dinámicos. Esta teoría ha tomado mucho impulso durante este siglo, destacándose la escuela americana (Birkhoff, Smale), la rusa (Lyapunov, Andronov, Pontryagin, Arnold), la francesa (Thom, Herman), inglesa (Zeeman) y la brasileña (Peixoto, Palis, Mañé).

El grupo de Sistemas Dinámicos del Instituto de Matemáticas lo iniciamos José Seade, Alberto Verjovsky y yo en el año de 1984 motivados en gran parte por las siguientes consideraciones :

1. Los Sistemas Dinámicos proveen a diversas ramas de la Ciencia con modelos matemáticos; en particular, a la Física, Química, Biología, Ingeniería, Economía, etc. Uno de los problemas que se contemplaba sobre el camino que había seguido la Matemática en México era un relativo alejamiento de otras Ciencias. Sin embargo, para que la Matemática tuviera un desarrollo balanceado en el país, era conveniente impulsar esta parte tan importante de las matemáticas : la de servir como un lenguaje a otras ciencias.

2. El proceso de desarrollo de las Matemáticas en México había creado diversas especialidades, pero en varias de ellas hay pocos investigadores por área; causando así un aislamiento relativo entre los matemáticos mexicanos. Era necesario encontrar áreas comunes de trabajo para diversos grupos de investigadores, pero que estuviesen lo suficientemente cercanas a las áreas ya desarrolladas para poder así aprovechar al máximo la infraestructura ya creada. La naturaleza multifacética de los Sistemás Dinámicos nos pareció en aquel entonces ser un área cercana a la Geometría Algebraica, a la Topología Diferencial y al Análisis, áreas que ya tenían un cierto desarrollo.

3. Lo multifacético de los Sistemas Dinámicos justificaría la formación de un buen número de estudiantes que con el tiempo se convertirían en profesores-investigadores en las universidades del país. Uno de los mayores retos a los que se enfrenta hoy en día la comunidad matemática es en la formación de cuadros de profesores-investigadores para las Universidades de provincia. Pensamos que estudiantes especializados en Sistemas Dinámicos podrían interactuar positivamente con los cuadros de profesores-investigadores que hay en las distintas universidades del país. Es importante para poder llevar este proyecto a cabo el que sea un número considerable de estudiantes los que se formen, para evitar el problema del aislamiento del punto anterior, y que puedan interactuar entre sí los profesores-investigadores de las universidades cercanas.

4. Los Sistemas Dinámicos conforman una rama de vigoroso desarrollo mundial, con una multitud de problemas y métodos recién desarrollados, que hacen ver que puede uno obtener resultados de investigación a corto plazo, así como la creación de una escuela mexicana a mediano plazo.

Hoy en día tenemos en el Instituto de Matemáticas de la UNAM un grupo numeroso de estudiantes que estamos iniciando en Sistemas Dinámicos, que van desde estudiantes avanzados de doctorado y maestría (tanto en la UNAM como en la URSS, Estados Unidos y Brasil) como de licenciatura. Ofrecemos una serie de cursos de licenciatura y posgrado y tenemos un seminario de investigación donde exponemos los resultados de la investigación que desarrollamos, así como conferencias de investigadores visitantes nacionales y extranjeros.

Las actividades principales que se han llevado a cabo son :

1. El I Coloquio de Sistemas Dinámicos, llevado a cabo en diciembre de 1983 en la Ciudad de Guanajuato y cuyas memorias aparecen en Aportaciones Matemáticas 1, 1985.

2. Dentro de las festividades del Centenario del Nacimiento de Solomon Lefschetz en diciembre de 1984, una sección dedicada a las Ecuaciones Diferenciales, cuyas me-

morias aparecen en Contemporary Mathematics 58, 1986.

3. El Semestre de Actividades en Sistemas Dinámicos en la UNAM (1986) y el II Coloquio Sistemas Dinámicos que se llevó a cabo durante Julio de 1986 en Chapala, cuyas memorias aparecerán en las Lecture Notes de la Springer Verlag.

El área central de investigación de nuestro grupo han sido los Sistemas Dinámicos Holomorfos, aunque entre los estudiantes estamos fomentando también las areas de Optimización, Modelaje, Biomatemáticas y Control.

Las principales investigaciones han sido publicadas en :

1. Las memorias del I Coloquio de Sistemas Dinámicos (editadas por J. Seade y G. Sienra) :

a) X. Gómez-Mont : On Families of Rational Vector Fields 36-65.

b) G. Sienra : Minimal Affine Maps of T^3 108-114.

c) A. Verjovsky : Topological Actions of Lie Groups 152-158.

2. Memorias del Centennial Lefschetz Conference (editadas por A. Verjovsky):

a) X. Gómez-Mont : Foliations by Curves of Complex Analytic Spaces 123-141.

b) J. Seade : The index of vector field on a complex surface with singularities.

c) A. Verjovsky : A Uniformization Theorem for Holormophic Foliations.

3. Memorias del II Coloquio de Sistemas Dinámicos (editadas por X. Gómez-Mont, J. Seade y A. Verjovsky) :

a) J. Alexander y A. Verjovsky : First Integrals for Singular Holomorphic Foliations with Leaves of Bounded Volume.

b) X. Gómez-Mont y J. Muciño : Persistent Cycles for Holomorphic Foliations Having a Meromorphic First Integral.

c) E. Lacomba y G. Sienra : Blow up Techniques in the Kepler Problem.

d) S. López de Medrano : The Space of Siegel Leaves of a Holomorphic Vector Field.

e) F. Sánchez Bringas : On Structural Stability of Vector Fields on Surfaces with a Simple Singularity.

4. X. Gómez-Mont :

a) Transverse Deformations of Holomorphic Foliations in Proc. Conf. S. Lefschetz, Cont. Math., 58 (1986) ed. D. Sundararaman.

b) Universal Families of Foliations by Curves, en Proc. Conf. Dyn. Syst., Dijon, 1985, ed. D. Cerveau y R. Moussu, Asterisque.

c) The Transverse Dynamics of a Holomorphic Flow, en Annals of Math., 126 (1987), 44pp.

d) Holomorphic Foliations in Ruled Surfaces, por aparecer en Transactions of AMS.

5. S. López de Medrano : Topology of the Intersection of Quadrics in $\mathbb{R}^n$, en

Lecture Notes de la Springer-Verlag.

Los siguientes trabajos están enviados para su publicación :

6. X. Gómez-Mont, J. Seade y A. Verjovsky : The index of a Holomorphic Flow with an Isolated Singularity, en Math. Ann.

7. X. Gómez-Mont y G. Kempf : Stability of Diferential Equations in Projective Spaces, en Inv. Math.

Se está mecanografiando una monografía introductoria elaborada por X. Gómez-Mont y L. Ortiz : Propiedades Topológicas y Variacionales de Ecuaciones Diferenciales en el Plano, Aportaciones Matemáticas.

También se está elaborando un texto básico para los cursos de Ecuaciones Diferenciales, por H. Mendez Lango.

Para concluir esta presentación, mencionaremos que dentro de los Sistemas Dinámicos encontramos toda la gama de las matemáticas, desde investigación básica en Matemáticas puras hasta modelos matemáticos por computadora. Es necesario para un desarrollo balanceado que haya especialistas en toda la gama : i.e. gente que trabaje problemas de naturaleza puramente matemática, hasta gente que se dedique al modelaje. Es la intersección entre la teoría y la práctica la manera más positiva de desarrollar un área tan multifacética de las matemáticas como son los Sistemas Dinámicos.

SCROLLS Y CONFOCALIDAD

Carlos Gómez Mont

Mi interés actual es establecer un isomorfismo de sistemas dinámicos entre curvas algebraicas y sus Jacobianas, sistemas dinámicos de objetos geométricos como el scroll y , más generalmente, variedades mínimas.

En el panorama histórico se encuentran los trabajos de Euler- Hamilton, Chasles, Jacobi y Korteweg de Vries.

El planteamiento del problema es el siguiente: Dado $(a_1, ..., a_{k+1})$ en $\mathbb{R}^{k+1}$, con $0 < a_1 < ... < a_{k+1}$, se trata de construir (1) el Hamiltoniano $H = \Sigma a_i x_i^2 + y_i^2$ en el haz tangente a la k-esfera y (2) el Jacobiano de la curva $y^2 = \Pi(x - a_i)(x - \lambda_i)$, con $a_i < \lambda_i < a_{i+1}$.

Para resolver (1) en términos de (2), la geometría involucrada de acuerdo con Chasles es como sigue: Con confocalidad de cuádricas en $\mathbb{R}^n$, hay que hacer cambios de coordenadas que vayan de geodésicas en cuádricas reales y sistemas din'amicos lineales sobre Jacobianas hiperelípticas.

[1] GOMEZ MONT, C., THE BI-WEIGHTED EULER SEQUENCE ON SCROLLS, BOL. SOC. MAT. MEXICANA.

[2] GOMEZ MONT, C., ON LOCAL TORELLI FOR EXTREMAL VARIETIES, CONTEMP. MATH. (1986).

[3] GOMEZ MONT, X., ON FAMILIES OF RATIONAL VECTOR FIELDS, APORTACIONES MAT. (1985) 36-65.

[4] GOMEZ MONT, X., UNIVERSAL FAMILIES OF FOLIATIONS BY CURVES, ASTERISQUE (1987).

[5] GOMEZ MONT, X., BIFURCACION Y CAOS EN SISTEMAS DINAMICOS DEL PLANO COMPLEJO, REV. MEXICANA FIS. (1984) 65-487.

[6] GOMEZ MONT, X., HOLOMORPHIC FOLIATIONS IN RULED SURFACES, TRANS. AMER. MATH. SOC.

[7] GOMEZ MONT, X., GEOMTRIA NO-EUCLIDEANA, REV. FAC. CIENCIAS UNAM (1973).

[8] GOMEZ MONT, X., TRANSVERSAL DEFORMATIONS OF HOLOMORPHIC FOLIATIONS, MEM. SEMINARIO ESPECIAL DE TOPOLOGIA (1984) 151-178.

[9] GOMEZ MONT, X., TEMAS DE TOPOLOGIA ALGEBRAICA (1975).

[10] GOMEZ MONT, X., SYMMETRIC PRODUCTS OF HYPERELLIPTIC CURVES, BOL. SOC. MAT. MEXICANA (1983) 21-27.

[11] GOMEZ MONT, X., FOLIATION BY CURVES IN SINGULAR SPACES, CONTEMP. MATH. (1986).

[12] GOMEZ MONT, X., DIFFERENTIALS ON HYPERRELLIPTIC CURVES, AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1979) 141-147.

[13] GOMEZ MONT, X., UN EJEMPLO DE FINITUD TOPOLOGICA EN VARIEDADES ALGEBRAICAS, SEMINARIO ESPECIAL DE TOPOLOGIA (1981) 183-194.

[14] GOMEZ MONT, X., IDEALES LOCALMENTE DETERMINADOS EN ESPACIOS ANALITICOS, AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1980) 177-189.

[15] GOMEZ MONT, X., TRANSVERSE DEFORMATIONS OF HOLOMORPHIC FOLIATIONS, CONTEMP. MATH. (1986) 127-139.

[16] GOMEZ MONT, X., DEFORMATIONS OF HYPERELLIPTIC CURVES. BOL. SOC. MAT. MEXICANA (2) (1981) 21-27.

[17] GOMEZ MONT, X., FOLIATIONS BY CURVES OF COMPLEX ANALYTIC SPACES, CONTEMP. MATH. (1987).

[18] GOMEZ MONT, X., THE TRANSVERSE DYNAMICS OF A HOLOMORPHIC FLOW, ANN. OF MATH. (2) (987).

[19] GOMEZ MONT, X., TRANSVERSAL HOLOMORPHIC STRUCTURES, J. DIFFERENTIAL GEOM. (1980) 161-185.

[20] GOMEZ MONT, X., SUNDARARAMAN, D., REMARKS ON THE VERSAL FAMILIES OF DEFORMATIONS OF HOLOMORPHIC AND ... SEMINAR ON DEFORMATION, D.REIDEL PUBL.NETHE (1987).

[21] GOMEZ MONT, X., SEADE, J., VERJOVSKY, A., THE INDEX OF A HOLOMORPHIC FLOW WITH AN ISOLATED SINGULARITY, MATH. ANN.

[22] LOPEZ DE MEDRANO, S., SOBRE LA VARIEDAD DE HOJAS DE SIEGEL. MEM. SEMINARIO ESPECIAL DE TOPOLOGIA (1984).

[23] LOPEZ DE MEDRANO, S.,THE SPACE OF SIEGEL LEAVES OF A HOLOMORPHIC VECTOR FIELD, MEM. DEL II COLOQUIO DE SIST.DINAMICOS.

[24] RECILLAS, S., CURVE OF GENUS 9 WITH A HALF-CANONICAL EMBEDDING IN P-THREE, ATTI ACCAD. NAZ. LINCEI (1984) 3-4.

[25] SEADE, J., A COBORDISM INVARIANT FOR SURFASE SINGULARITIES, PROC. SYMPOS. PURE MATH. (1983) 479-484.

[26] SEADE, J., INVARIANT FRAMINGS OF QUOTIENTS OF SL-TWO(R) BY DISCRETE GROUPS, CONTEMP. MATH. (1982) 293-297.

[27] SEADE, J., T ON THE ETA-FUNCTION OF THE DIRAC OPERATOR ON GAMMA/S-THREEEAN, INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1981) 129-147.

[28] SEADE, J., GEOMETRY AND THE STABLE HOMOTOPY OF SPHERES, TOPIC IN SEVERAL...

[29] SEADE, J., THE INDEX OF A VECTOR FIELD ON A COMPLEX SURFACE WITH SINGULARITIES. CONTEMP. MATH.

[30] SEADE, J., VECTOR FIELDS ON SMOOTHINGS OF COMPLEX SINGULARITIES, RES. NOTES IN MATH. (1985) 152-157.

[31] SEADE, J., SINGULAR POINTS OF COMPLEX SURFACES AND HOMOTOPY, TOPOLOGY (1982) 1-8.

[32] SEADE, J., SINGULARIDADES DE SUPERFICIES COMPLEJAS, MEM. SEMINARIO ESPECIAL DE TOPOLOGIA (1981) 151-156.

[33] SEADE, J., BANGUE, L., FRAMINGS ON ALGEBRAIC KNOTS, QUART. J. MATH. OXFORD SER. (2) (1987).

[34] SEADE, J., STEER, B., A NOTE ON THE ETA-FUNCTION FOR QUOTIENTS OF PSL-2(R) BY COCOMPACT... TOPOLOGY.

[35] SEADE, J., STEER, B., THE ELEMENTS OF PI ES 3 REPRESENTED BY INVARIANT FRAMINGS OF QUOTIENTS, ADV. IN MATH. (1982) 221-228.

[36] TORRES, G., UNA PROYECCION CANONICA DE CADENAS, AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1962) 17-23.

[37] TORRES, G., ON THE ALEXANDER MATRIX OF A CHAIN, AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1963) 21-27.

LOGICA Y FUNDAMENTOS

LOGICA CATEGORICA

A. Odgers

La lógica categórica se fundamenta sobre el hecho de que el estudio de algunas teorías de interés para la lógica es equivalente al estudio de determinadas categorías, algunos ejemplos son las siguientes :

Lógica	**Categorías**
Cálculos Lambda	C-monoides
Cálculos Lambda con tipos	Categorías cartesianamente cerradas
Teorías de los tipos	Topos

Debido a estas equivalencias, es posible "traducir" algunos conceptos y teoremas de la lógica a conceptos y teoremas categóricos (y viceversa). Debido al interés propio de algunas de las categorías particulares involucradas, conviene examinar las consecuencias de dichos teoremas sobr ellas. Ejemplo : Las funciones recursivas se pueden representar en cada cálculo lambda, por tanto son representables en cada C-monoide, y permite desarrollar teorías de recursión en C-monoides particulares.

Investigo sobre la representación de C-monoides y categorías cartesianas particulares.

FUNDAMENTOS DE LAS MATEMATICAS

Trataremos brevemente el área de investigación de **F. Tomás**.

Una de las áreas más interesantes de la lógica es el aspecto de la Fundamentación de las Matemáticas. Hilbert planteó un programa formalista cuyo objetivo final era obtener la formalización *completa* de la Matemática clásica. Dicho programa se puede describir de la siguiente manera:

(i) Construir sistemas formales completos para las principales teorías de la matemática clásica.

(ii) Probar la consistencia de dichos sistemas formales.

Desgraciadamente, Kurt Gödel demostró que dicho programa no podía llevarse a cabo, éste es uno de los resultados más importantes de la lógica en este siglo. De acuerdo con este último comentario podría pensarse que el programa de Hilbert es imposible de realizar. Sin embargo, la dificultad de llevar a cabo dicho programa radica en *no aceptar* otros instrumentos de la formalización distintos de un sistema formal fijo.

A partir de esta idea, se han logrado encontrar sistemas formales llamados, "Formalismos Recursivos", en donde el programa de Hilbert puede llevarse a cabo. Una de las aplicaciones inmediatas de este resultado es el poder desarrollar aritmética y análisis formalmente recursivos.

En particular, el desarrollo del *análisis formalmente recursivo* ha mostrado ventajas evidentes al compararlo con el análisis recursivo. Specker demostró que en el análisis recursivo existen sucesiones de funciones recursivas $\{f(n)/g(n)\}_{n\in\mathrm{N}}$ crecientes y acotadas superiormente para los cuales no puede demostrarse que sean de Cauchy; i.e., no existe una función recursiva $h(n)$ tal que

$$|f(n)/g(n) - f(s)/g(s)| < \frac{1}{n} \text{ siempre que } \quad r, s > h(n).$$

Dicho fenómeno *no* aparece en el *análisis formalmente recursivo.*

L. R.

LOGICA Y ENSEÑANZA

Gonzalo Zubieta

Labor desarrollada

1949-55: **Sintaxis lógica** (Bol. S.M.M. 1950, 51, 54)

Completitud de los axiomas formales de cualquier lenguaje teorético de primer orden. Sustitución de los enunciados atómicos en esos lenguajes.

1956-64: **Teoría de los modelos** (Bol. S.M.M. 1955, 57)

Modelos de los lenguajes teoréticos de primer orden. Caracterizaciones algebraicas de las clases aritméticas de esos modelos.

1965-78: **Teoría de la medida** (Trillas 1970, Monografía 1975, Fondo Educativo 1986, Nueva monografía en preparación)

Teoría de la integral para medidas finitamente aditivas. Principio de Duhamel en un espacio de medida. Principio de Duhamel en un espacio métrico.

1979-87: **Análisis no estándar** (Monografía en preparación)

Análisis infinitesimal con teoría de los tipos. Análisis infinitesimal con teoría axiomática de los conjuntos.

1979-87: **Disciplinas formales del Bachillerato** (Lógica Formal, en prensa, CECSA; Geometría Elemental, lista para publicarse; Cálculo Elemental, en preparación)

Estos cursos contienen una estrategia precisa para impartir las matemáticas del Bachillerato, **a partir de cero.** Esto es posible gracias al entrenamiento analítico que recibe el alumno al empezar, y al enfoque original de cada tema. Difiere de otros intentos (Polya, por ejemplo) en que éstos se limitan a dar recomendaciones, sin llegar a precisar las barreras del entendiniento en el estudiante medio, cosa que sólo puede lograrse a través del análisis lógico del lenguaje, tal como lo tengo desarrollado.

[1] ARIZMENDI, H., LARA, M., TOMAS, F., UNA NOCION ABSTRACTA DE TOPOLOGIA COMPACTO-ABIERTA, AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1981) 1-19.

[2] ODGERS, A., LA TOPOLOGIA COMO PREAMBULO A LA TEORIA DE LAS GRAFICAS, BOLETIN DE TECNICAS Y APLICACIONES DEL MUESTREO No. 9 (1966).

[3] ODGERS, A., LOS NUMEROS ENTEROS, ANUIES (1975).

[4] TOMAS, F., UNA FORMALIZACION RECURSIVA FINITARIAMENTE CONSISTENTE DE UN ... AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1980) 205-258.

[5] TOMAS, F., ARITMETICA I ANALISIS FORMALMENT RECURSIVES, PUBL. SEC. MAT. UNIV. AUTONOMA BARCELONA (1984) 19-78.

[6] TOMAS, F., ARENAS, G., T*FORMALLY RECURSIVE ARITHMETIC AND CLASSICAL ARITHMETIC, AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO 26 (1986) 1-19.

[7] ZUBIETA, G., INTERPRETACIONES DE LA NOTACIONES DIFERENCIAL PARA FUNCIONES DE CONJUNTO, AN. INST. MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO No. 2 (1962).

[8] ZUBIETA, G., TEORIA DE LA INTEGRAL, TRILLAS SMM (1970).

[9] ZUBIETA, G., LOGICA ELEMENTAL, ANUIES (1973).

[10] ZUBIETA, G., INTEGRALES DE MEDIDA POSITIVA, MONOGRAFIAS INST. MAT. UNAM No. 3 (1976) 157 pp.æ

TOPOLOGIA

Se puede decir que la topología es la rama de las matemáticas que estudia aquellos espacios en los que es posible decir si un punto está cerca de un conjunto (espacios topológicos) y las funciones que respetan esta relación de cercanía (funciones continuas).

En un principio la topología fue conocida con el nombre de Analisis Situs debido a Leibniz (1646-1716). Su idea de la topología la encontramos en el siguiente parrafo escrito por Euler (1707-1783):

"Además de aquella parte de la geometría que trata sobre cantidades y que se ha estudiado en todo tiempo con gran dedicación, el primero que mencionó la otra parte, hasta entonces desconocida, fue Leibniz, el cual la llamó geometría de la posición. Leibniz determinó que esta parte se tenía que ocupar de la sola posción y de las propiedades provenientes de la posición en todo lo cual no se ha de tener en cuenta las cantidades, ni su cálculo ... Por ello, cuando recientemente se mencionó cierto problema que parecía realmente pertenecer a la geometría, pero estaba dispuesto de tal manera que ni precisaba la determinación de cantidades ni admitía solución mediante el cálculo de ellas, no dudé en referirlo a la geometría de la posición ..."

El párrafo anterior es la introducción del artículo en el que se da la solución del famoso problema de los puentes de Königsberg en 1726 y que consiste en dar una condición necesaria y suficiente para que una gráfica (poliedro de dimensión 1) pueda ser trazada con una línea continua recorriendo cada arista una sola vez. Este artículo es generalmente aceptado como el primer trabajo de topología.

La topología se divide en 2 grandes ramas, la topología general y la topología algebraica. Como su nombre lo indica, ellas se distinguen por el carácter de sus métodos pero también por sus distintos orígenes.

La topología general nace de problemas en la teoría de funciones de variable real y se desarrolla para responder principalmente a las necesidades del análisis, además está íntimamente ligada con la teoría de conjuntos.

El desarrollo sistemático de la topología algebraica nace con los trabajos de Riemann sobre funciones de variable compleja y geometría algebraica, que llevaron al estudio topológico de las superficies. Sin embargo, no debe entenderse que son 2 ramas separadas, hay teorías, coma la de la dimensión, que son mezcla de ambas.

La topología ha tenido un crecimiento espectacular, particularmente de los cincuenta a la fecha. Nosotros hemos querido usar el término topología algebraica en el sentido más amplio posible y englobar bajo este nombre a ramas de la topología, como la topología geométrica o la topología categórica, que no sólo tienen un origen común, sino que también han tenido un desarrollo paralelo durante el cual han influido unas en otras. Así pues, la división que hemos hecho es simplemente para facilitar la exposición de un tema tan vasto y está basada en cierta diferencia en el tipo de problemas en que trabajamos.

TOPOLOGIA ALGEBRAICA

La topología algebraica se conoció en un principio con el nombre de topología combinatoria. Se puede decir que uno de los primeros resultados de la topología combinatoria es la fórmula de Euler (1750) $v - a + c = 2$, que relaciona el número de vértices : v, el número de aristas: a y el número de caras : c, de un poliedro. La demostración dada por Euler para esta fórmula no es correcta y muchos matemáticos de la época se ocuparon de ella entre ellos Legendre, Cauchy, Möbius, Jordan, etc. La primera demostración satisfactoria la dio Von Staudt en 1847. Pero es solamente hasta 1861 que Cayley y Listing (que fue alumno de Gauss) ven la fórmula de Euler como un teorema topológico, es decir, que se aplica a poliedros homeomorfos a la esfera de dimensión 2 (un homeomorfismo es una función biyectiva tal que ella y su inversa son continuas). A Listing le debemos también el descubrimiento de superficies no orientables (al mismo tiempo que a Möbius) así como el nombre **topología** (1836).

Como ya se mencionó anteriormente, es con los trabajos de Riemmann (1826-1866) que empieza el desarrollo sistemático de la topología algebraica. Para estudiar el comportamiento de las funciones de variable compleja, él asocia a cada función una superficie, que llamamos superficie de Riemann, y estudia sus propiedades topológicas.

Con Henri Poincaré (1854-1912) la topología algebraica empieza su gran desarrollo. En una serie de trabajos publicados entre 1892 y 1904, motivados por problemas en ecuaciones diferenciales, mecánica y variable compleja, Poincaré inicia el estudio de los temas básicos de la topología algebraica. En estos trabajos se encuentra el origen de la homología, del grupo fundamental, de la relación entre las formas diferenciales y la homología, del índice de un punto fijo de una función y del concepto de dualidad para variedades.

A continuación hablaremos acerca de estas ideas:

Un poliedro es una unión de simplejos (los $0-$simplejos son puntos, los $1-$simplejos son segmentos, los $2-$simplejos triángulos, los $3-$simplejos tetraedros, etc.) tales que dos simplejos son ajenos o tienen exactamente una de sus caras en común. El concepto de homología fue definido originalmente para poliedros. Se consideran combinaciones lineales de $n-$simplejos (con coeficientes enteros) llamados $n-$cadenas. Una $n-$cadena cuya frontera es cero se llama un $n-$ciclo y decimos que un $n-$ciclo z es homólogo a cero $z \sim 0$, si existe una $(n+1)-$cadena cuya frontera es z. Al máximo número de $n-$ciclos homológicamente independientes Poincaré lo llamó el $n-$número de Betti del poliedro (los ciclos de $z_1, z_2, \ldots, z_r$ son homológicamente independientes si dado $\sum_{i=1}^{r} a_i z_i \sim 0$

entonces toda a_i es cero). Poincaré generalizó la fórmula de Euler de la siguiente manera, dado un poliedro P definimos su característica de Euler, $\chi(P) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i\alpha_i$, donde α_i es el número de i−simplejos; si b_i denota el i−ésimo número de Betti, entonces $\sum_{i\geq 0}(-1)^i\alpha_i = \sum_{i\geq 0}(-1)^i b_i$, relación que se conoce como fórmula de Euler-Poincaré.

Es fácil ver que en el caso de un poliedro homeomorfo a la esfera de dimensión 2, el lado drecho es igual a 2. (En general, para la esfera de dimensión n, S^n, tenemos

$$\chi(S^n) = \begin{cases} 0 & si \quad n \quad es \quad impar \\ 2 & si \quad n \quad es \quad par \end{cases}$$

Las definiciones y demostraciones de Poincaré suponían tácitamente casi siempre que los ciclos estaban dados por variedades (espacios que son localmente como un espacio euclidiano). Este punto de vista fue desarrollado mucho tiempo después por R. Thom (1954) en su teoría de cobordismo, de la que hablaremos más adelante. Se dice que un espacio está triangulado si es homeomorfo a un poliedro. El siguiente paso era demostrar la invariancia de los números de Betti, es decir, que los números de Betti de un espacio triangulado eran independientes de la triangulación. Poincaré pensó que lo había logrado al probar que los números de Betti no cambian al subdividir el poliedro. Este argumento se basaba en la hipótesis de que 2 triangulaciones poseen subdivisiones isomorfas y que se conoce como la Hauptvermutung (Conjetura fundamental). Un contraejemplo a esta conjetura fue dado por Milnor en 1961 (este contraejemplo no es variedad, pero Kirby y Siebenmann (1969) dieron un contraejemplo que sí es variedad).

La invariancia de los números de Betti fue probada por Alexander (1915) usando otro método que consiste en admitir simplejos con singularidades. Esto sirvió de base a Eilenberg para definir en 1944 la homología singular de espacios arbitrarios.

El estudio de puntos fijos de mapeos, es decir puntos x tales que $f(x) = x$, ha seguido con gran ímpetu hasta nuestros días. En 1911, Brouwer probó que toda función continua de la bola de dimensión n en sí misma tiene un punto fijo.

Utilizando el índice de punto definido por Poincaré (que es un entero asociado a cada punto fijo), Lefschetz generalizó, en 1923, el teorema de Brouwer, dando una condición algebraica para la existencia de puntos fijos. Lefschetz (1884-1972) es uno de los matemáticos más importantes del siglo XX. Sus aportaciones a la topología algebraica incluyen, además del teorema de punto fijo ya mencionado, la dualidad para variedades con frontera, productos en cohomología, junto con Alexander y Eilenberg la teoría de homología singular y especialmente el desarrollo y pulimiento de las ideas básicas de la topología algebraica. De hecho el nombre de **topología algebraica** es debido a él (1942).

También debemos mencionar que Lefschetz hizo contribuciones muy importantes a otras ramas de las matemáticas como la geometría algebraica y los sistemas dinámicos. Además Lefschetz fue una figura clave para el desarrollo de las Matemáticas en México. Fue investigador visitante del Instituto de Matemáticas y con su apoyo muchos matemáticos mexicanos realizaron su doctorado en Estados Unidos. El gobierno de México le otorgó la orden del Aguila Azteca en reconocimiento a su labor.

Poincaré describía la homología en términos de ciertos números enteros (los números de Betti y los coeficientes de torsión), estos números son en realidad invariantes asociados a la estructura de grupo que tiene la homología. Este nuevo punto de vista, es decir, el de asociar a un espacio topológico una estructura algebraica, fue fundamental en el desarrollo de la topología algebraica y se debe a Vietoris (quien en 1926 definió grupos de homología para espacios métricos compactos) y a H. Hopf (por influencia de Emmy Noether). De esta manera le asociamos a cada espacio triangulable X su $n-$grupo de homología (llamada simplicial) $H_n(X)$, con coeficientes enteros o a cada espacio arbitrario su $n-$grupo de homología singular. Con este nuevo punto de vista Hopf (1928) dió una demostración muy elegante de la fórmula de Euler-Poincaré y generalizó el teorema de punto fijo de Lefschetz que entonces se conocía sólo para mapeos en variedades.

Fue estudiando la relación entre teorías de homología con distintos coeficientes, al tratar de formalizar la noción de una construcción natural, que Eilenberg y MacLane introdujeron los conceptos de categoría, de funtor y de transformación natural entre funtores en 1942. En una categoría tenemos objetos $X, Y, \ldots$ y morfismos entre objetos $f : X \to Y$. Un funtor $F : \underset{\sim}{C} \to \underset{\sim}{D}$ entre categorías asocia a cada objeto X de $\underset{\sim}{C}$ un objeto $F(X)$ de $\underset{\sim}{D}$ y a cada morfismo f de $\underset{\sim}{C}$ un morfismo de $F(f)$ de $\underset{\sim}{D}$ satisfaciendo 1) $F(id_X) = id_{F(X)}$; 2) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$. Un ejemplo de funtor entre la categoría de espacios topológicos y la categoría de grupos abelianos es el que asocia a cada espacio X su $n-$grupo de homología $H_n(X)$ y a cada mapeo $F : X \to Y$ el homomorfismo inducido $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(Y)$. La Teoría de categorías ha tenido un papel unificador en la matemática contemporánea similar al que tuvo la teoría de conjuntos. El lenguaje de las categorías permitió expresar mejor muchos conceptos de la teoría algebraica a tal grado que casi podemos decir que la topología algebraica es el estudio de funtores de la categoría de espacios topológicos a una categoría algebraica como la de grupos o anillos. La idea detrás de esto es capturar la estructura topológica por medio de una estructura algebraica que sea más fácil de estudiar. Por ejemplo si uno quiere probar que una función continua $f : X \to Y$ con ciertas propiedades no existe, bastará con probar que el homomorfismo $F(f)$ no puede existir. De esta manera, entre más rica sea la estructura algebraica, más restricciones se le imponen a los homorfismos y en algunos casos la topología queda completamente caracterizada por el álgebra.

A partir de entonces la teoría de categorías se había desarrollado como una rama independiente dentro de las Matemáticas hasta que algunos matemáticos, entre los que figuran principalmente Roberto Vázquez y Graciela Salicrup, empezaron a establecer una conexión más profunda entre la teoría de categorías y la topología, ayudando así a crear una nueva rama que se conoce como topología categórica en la cual conceptos y construcciones de la topología se estudian con métodos de la teoría de categorías y ciertos conceptos topológicos se transladan a categorías arbitrarias.

En 1945 Eilenberg y Steenrod dieron una caracterización axiomática de la homología, la cual permite establecer equivalencias entre diversas teorías de homología. Uno de los axiomas se refiere a los coeficientes de la teoría, es decir, a los grupos de homología de un punto. Se pedía que fueran iguales al grupo trivial en dimensiones distintas de cero y se llamaba grupo de coeficientes a la homología de dimensión cero de un punto. Hoy llamamos teorías de homología ordinarias a las que satisfacen este axioma y teorías generalizadas cuando la homología de un punto consta de grupos no triviales en dimensiones distintas de cero. Se puede probar que dos teorías de homología ordinarias con los mismos coeficientes son isomorfas en la categoría de espacios triangulados compactos. En 1961 Atiyah probó que con la teoría de cobordismo de Thom se puede construir una teoría de homología generalizada.

Hasta ahora sólo hemos hablado del concepto de homología, sin embargo, hay otro concepto fundamental en la topología algebraica, cuya importancia es cada vez mayor, a saber, el concepto de homotopía, cuyo origen está en la definición del grupo fundamental debida a Poincaré. Dadas dos funciones continuas $f, g : X \to Y$ decimos que son homotópicas si podemos deformar a una en la otra, es decir, si existe una función continua $H : X \times [0,1] \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$. Esto nos proporciona una relación de equivalencia en el conjunto de funciones continuas entre X y Y. Al conjunto de clases de equivalencia se le denota por $[X, Y]$. Con esta notación el grupo fundamental de un espacio X se define como $\pi_1(X) = [S^1, X]$ donde S^1 es el círculo (pedimos además que todas las funciones apliquen un punto dado de S^1 en un punto dado de X, llamado el punto básico) y donde la multiplicación de dos lazos se obtiene recorriendo uno después del otro. También podemos definir los grupos de homotopía de orden superior como $\pi_n(X) = [S^n, X]$. Mientras que π_1 es en general no abeliano, Hurewicz probó que π_n es abeliano si $n > 1$. En general los grupos de homotopía de un espacio son terriblemente difíciles de calcular. Utilizando el concepto de grado de una función, introducido por Brouwer en 1911, Hopf demostró en 1925 que $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$.

Sin embargo, nada se sabía de los grupos $\pi_m(S^n)$ para $m > n$, hasta que Hopf probó en 1930 que $\pi_3(S^2) \neq 0$ exhibiendo un mapeo $f : S^3 \to S^2$ que no es homotópico al mapeo constante y que se conoce como mapeo de Hopf. Esto se hace mediante una generalización del grado llamado invariante de Hopf y definido para funciones $f : S^{2n-1} \to S^n$. El problema de calcular los grupos $\pi_m(S^n)$ sigue siendo uno de los grandes problemas de la topología . El teorema general más importante al respecto es el teorema de Serre (1951) que dice que los grupos $\pi_m(S^n)$ son finitos excepto en los casos $m = n$ ó $m = 2n - 1$, n par, que ya se sabía que eran infinitos.

Hopf también estudió la clasificación homotópica de mapeos de un $n-$poliedro K en la esfera S^n. Sus resultados se expresan en términos de la homología, pero así son difíciles de enunciar. Sin embargo, con la introducción de la cohomología, a mediados de los treinta, Whitney pudo enunciar el resultado de Hopf como la existencia de una biyección entre $[K, S^n]$ y el enésimo grupo de cohomología $H^n(K)$. Parece que el término **cohomología** se debe a Whitney, así como la observación de que los "pseudociclos" de Lefschetz y los ciclos del "complejo dual" de Mayer son en realidad cociclos. Una ventaja de la cohomología es que en ella se puede definir un producto, introducido por Alexander y por Kolmogorov (1935), que se inspiraron en el trabajo de Pontryagin. De esta manera $H^*(X)$ es un anillo graduado.

Una teoría de cohomología también puede ser caracterizada por axiomas parecidos a los de una teoría de homología. La diferencia es que la cohomología es un funtor contravariante, a diferencia de la homología que es un funtor covariante, es decir, si $f : X \to Y$ es una función continua $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(Y)$ mientras que $H^n(f) : H^n(Y) \to H^n(X)$.

Un hecho muy importante es que si f y g son homotópicas $H_n(f) = H_n(g)$ y $H^n(f) = H^n(g)$, y por esto se dice que la homología y la cohomología son funtores de homotopía. Decimos que dos espacios X, Y son del mismo tipo de homotopía si existen funciones $\varphi : X \to Y$ y $\psi : Y \to X$ tales que $\psi \circ \varphi$ es homotópica a la identidad en X y $\varphi \circ \psi$ es homotópica a la identida en Y. Como consecuencia de la propiedad antes mencionada tenemos que si dos espacios X, Y son del mismo tipo de homotopía, entonces $H_*(X) \cong H_*(Y)$ y $H^*(X) \cong H^*(Y)$. Claramente si dos espacios son homeomorfos entonces son homotópicamente equivalentes pero el inverso no es cierto en general. Esta propiedad de invariancia homotópica es uno de los axiomas que se usan para caractertizar las teorías de homología y cohomología.

Como en el caso de la homología, decimos que una teoría de cohomología $h^n(-)$ es ordinaria si $h^n(punto) = 0$ si $n \neq 0$ y decimos que el grupo $h^0(punto)$ son los coeficientes de la teoría; un ejemplo de este caso es la cohomología singular con coeficientes enteros $H^n(-)$. Si existen grupos no triviales en dimensiones distintas de cero diremos que es una teoría de cohomología generalizada, más adelante daremos un ejemplo de estas teorías.

La homotopía tiene un papel central en la topología como podemos ver en el siguiente resultado. Es posible construir, para cada entero positivo n, un espacio $K(\mathbb{Z}, n)$, llamado espacio de Eilenberg-MacLane tal que

$$\pi_i(K(\mathbb{Z}, n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & si \quad i = n \\ 0 & si \quad i \neq n \end{cases}$$

Estos espacios tienen la propieded de que $H^n(X) \cong [X, K(\mathbb{Z}, n)]$. Es decir podemos expresar a la cohomología singular en terminos de homotopía. También podemos expresar a la homología singular en términos de homotopía aunque en este caso el resultado es un poco más dificil de enunciar. De hecho todas las teorías generalizadas, por un teorema de E. Brown (1962), pueden ser expresadas en términos de homotopía.

Como hemos visto, un problema básico consiste en estudiar las clases de homotopía entre dos espacios X y Y. Un primer paso sería el de encontrar en cada clase de homotopía una función con propiedades conocidas y cuyo comportamiento podamos entender mejor. Por ejemplo, si X y Y son variedades diferenciables, es decir, si son espacios localmente euclidianos con cambios de coordenadas diferenciables, podemos hablar del concepto de función diferenciable entre X y Y. Tenemos así una extensión de los conceptos del cálculo diferencial para funciones diferenciables entre espacios euclidianos. En este caso se puede probar que en cada clase de homotopía existe una función diferenciable. Los primeros ejemplos de variedades diferenciables son las superficies de Riemann que ya mencionamos. Poincaré estudió las variedades de dimensión 3 y nos dejó uno de los problemas más importantes en topología, la conjetura de Poincaré : Si

M es una 3-variedad compacta y sin frontera tal que $\pi_1(M) = 0$, entonces M es homeomorfa a S^3.

Aunque la primera definición abstracta de variedad diferenciable la dio H. Weyl en 1912, es hasta 1936 que Whitney estudia sus propiedades sistemáticamente, probando algunos de los teoremas fundamentales. El desarrollo moderno de la topología diferencial empieza en 1956 con un resultado sorprendente de Milnor. Existen variedades diferenciables homeomorfas a S^7 pero no difeomorfas a ella, es decir, aunque topológicamente son iguales a S^7, diferenciablemente son distintas. Una herrramienta esencial para el estudio de las variedades son los haces vectoriales. Un haz vectorial sobre un espacio topológico X es una familia de espacios vectoriales parametrizada por los puntos de X y que localmente se ve como un producto. Este concepto es una mezcla de topología y álgebra lineal. Un ejemplo muy importante de haz vectorial es el haz tangente sobre una variedad diferenciable que nos da, en cada punto, una aproximación lineal a la variedad. Estudiando la posibilidad de que en un haz vectorial sobre X exista un número dado de vectores linealmente independiente que varían contínuamente, Whitney e, independientemente, Stiefel (1935), dieron la definición de ciertos elementos en $H^*(X, \mathbb{Z}_2)$, la cohomología con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$ de X, que se conocen como clases de Stiefel-Whitney (Chern definió clases similares para haces vectoriales complejos y Pontryagin para haces cuaterniónicos). Estas clases son muy importantes para el estudio de los haces vectoriales y por lo tanto de las variedades. Daremos 2 ejemplos para ilustrar sus aplicaciones. Utilizando resultados muy profundos de Bott sobre los grupos de homotopía de los grupos de Lie clásicos, Milnor e, independientemente, Kervaire (1958) obtuvieron resultados acerca de la existencia de haces vactoriales sobre esferas con cierta clase de Stiefel-Whitney distinta de cero. Como corolario obtuvieron el siguiente teorema algebraico : **Existen álgebras con división de rango n sobre los reales si y sólo si $n = 1, 2, 4$, u 8.**

El otro ejemplo está relacionado con la clasificación de las variedades diferenciables (compactas y sin frontera) módulo difeomorfismo. En dimensión 1 sólo tenemos al círculo S^1. En dimensión 2, W. Von Dyck (1890) demostró que una superficie queda caracterizada por su característica de Euler y por el hecho de ser o no orientable. El estudio de las variedades de dimensión 3 es una de las áreas más activas de la topología, especialmente con la introducción de estructuras geométricas por Thurston.

El problema de clasificar variedades de dimensión mayor o igual a 4 es sumamente complicado. Por un teorema de Markov, dado un grupo G, finitamente presentado, existe una variedad de dimensión 4, $M(G)$ tal que $\pi_1(M(G)) \cong G$; además si K es otro grupo finitamente presentado, $M(G)$ es homeomorfa a $M(K)$ si y sólo si G es isomorfo a K. Como no existe un algoritmo que decida si dos de estos grupos son isomorfos (P. S. Novikov), podemos concluir que no existe un algoritmo para decidir si dos variedades son homeomorfas.

Una manera de estudiar las variedades es la de dar una relación de equivalencia más debil que la de homeomorfismo. Para este efecto Thom (1954) introdujo la noción de cobordismo. Decimos que 2 variedades de la misma dimensión M y N son cobordantes si existe una variedadd compacta V tal que su frontera es difeomorfa a la unión ajena de M y N. Esto nos da un número finito de clases de equivalencia en cada dimensión y por medio de la unión ajena y del producto cartesiano de variedades se le puede dar una estructura de anillo graduado llamado anillo de cobordismo. Introduciendo la noción de transversalidad y generalizando una construcción de Pontryagin, Thom probó que este anillo es isomorfo a los grupos de homotopía de ciertos espacios asociados a haces vectoriales, estableciendo así una conexión muy profunda entre la homotopía y las variedades diferenciables. Calculando estos grupos de homotopía demostró que el anillo de cobordismo es un anillo de polinomios en un número infinito de variables, sobre $\mathbb{Z}_2$. Además, utilizando las clases de Stiefel-Whitney, definió invariantes algebraicos que determinan si 2 variedades son cobordantes.

Déspues del trabajo de Thom, esta teoría ha sido desarrollada por muchas personas (Atiyah, Milnor, Novikov, Quillen, etc.) y se ha convertido en una herramienta muy importante para el estudio de variedades, así como para el estudio de la homotopía estable.

Una relación entre cobordismo y difeomorfismo es el siguiente teorema de Smale (1962) conocido como el teorema del h-cobordismo. **Supongamos que V es un cobordismo entre M y N, tal que las inclusiones $M \hookrightarrow V$ y $N \hookrightarrow V$ son retractos por deformación, entonces, si M y N son de dimensión mayor que 4 y $\pi_1(M) = \pi_1(N) = 0$, M es difeomorfa a N.** Este teorema tiene muchas aplicaciones muy importantes, entre ellas la conjetura de Poincaré generalizada :Si M^n **es una variedad diferenciable compacta, sin frontera, de dimensión $n > 4$ tal que es del mismo tipo de homotopía que S^n entonces M es homeomorfa a S^n.**

Otra aplicación muy importante de los haces vectoriales es la teoría K de Atiyah y Hirzebruch (1961) quienes, basados en el trabajo de Grothendieck, asociaron a cada espacio X un grupo abeliano $K(X)$ de clases de equivalencia de haces vectoriales (de cualquier dimensión) sobre X y luego, usando el teorema de periodicidad de Bott, probaron que lo podían convertir en una teoría de cohomología generalizada $K^*(X)$ (de hecho se tienen dos teorías, una construida a partir de haces vectoriales reales $KO^*(X)$ -que es de período 8- y otra, usando haces vectoriales complejos, $K^*(X)$ -que es de período 2-). La teoría K es una de las herramientas más poderosas en topología algebraica. Como ejemplo mencionaremos tres aplicaciones : 1) La solución por Adams (1962) del problema de determinar el máximo número de campos linealmente independientes en el haz tangente a una esfera. 2) Una prueba muy corta (6 páginas) debida a Adams y Atiyah (1966) del teorema de Adams (1960) sobre la no existencia de mapeos con invariante de Hopf 1 (que originalmente tiene 80 páginas). 3) Usando también cobordismo, el teorema del índice de Atiyah-Singer (1963), que expresa en términos de invariantes topológicos el índice de un operador diferencial elíptico; en paricular, aplicando este teorema al operador de Cauchy-Riemann, se obtiene el teorema de Riemann-Roch para variedades complejas.

Como ya mencionamos anteriormente, entre más rica sea la estructura algebraica que asociemos a un espacio más información obtenemos acerca de él. En algunos de los resultados que hemos mencionado y en muchas otras aplicaciones ha jugado un papel fundamental el estudio de las transformaciones naturales entre las funtores $h^n(-)$ para una teoría de cohomología dada, a estas transformaciones se les llama operaciones y con ellas es posible construir una álgebra de manera que, para cada espacio X, $h^*(X)$ es un módulo sobre esta álgebra. Como ejemplo de estas operaciones están los cuadrados de Steenrod en cohomología singular con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$ y las potencias de Steenrod en cohomología con coeficientes en $\mathbb{Z}_p$ (p p.imo impar). Estas operaciones y ciertas relaciones entre ellas, conocidas como relaciones de Adem, han servido para resolver muchos problemas muy importantes.

A continuación mencionaremos algunas conjeturas muy importantes que han sido resueltas en los últimos años :

La solución de la conjetura de Adams (que se refiere a cierta propiedad de las operaciones de Adams en teoría K) por Quillen en 1970 (usando la teoría modular de caracteres para grupos finitos), Sullivan en 1974 (usando herramienta de geometría algebraica) y Becker y Gottlieb en 1975 (usando una nueva herramienta topológica conocida como la transferencia).

En 1983, R. Cohen probó la conjetura de la inmersión (**Toda variedad diferenciable de dimensión n, compacta y sin frontera puede ser inmergida en $\mathbb{R}^{2n-\alpha(n)}$, donde $\alpha(n)$ es el número de unos en la expansión diádica de n**) basándose en trabajo previo de Brown y Peterson y usando una nueva teoría de cohomología debida a Brown y Gitler.

Uno de los temas que ha recibido más atención en los últimos años es el de un grupo actuando en espacios. Si la acción de G en X es libre, el espacio de órbitas X/G resulta relativamente fácil de estudiar, pero si la acción no es libre las cosas se complican mucho. Para solucionar esto, se considera un espacio contraible EG donde G actúa libremente, se toma $EG \times X$ donde ahora G sí actua libremente y se considera $(EG \times X)/G$ en vez de X/G. Un problema ahora es saber la relación entre los puntos fijos originales X^G de la acción de G en X, que los podemos ver como $X^G = Map^G(punto, X)$ (mapeos equivariantes y los puntos fijos homotópicos $Map^G(EG, X)$. Sullivan conjeturó que estos espacios eran del mismo tipo de homotopía cuando la acción de G era trivial (G finito y X complejo finito). En este caso $X^G = X \cong Map^G(EG, X) = Map(BG, X)$ (donde $BG = (EG/G)$). Esto fue fue probado por H. Miller en 1983. El caso de acciones arbitrarias es un problema abierto.

En 1960 Atiyah probó para BG, el espacio clasificante de un grupo finito G, que $K(BG)$ es isomorfo a la completación del anillo de representaciónes de G respecto a su ideal de aumentación. Motivado por este resultado, Segal conjeturó que la 0-cohomotopía estable de BG, $\pi_s^0(BG)$ (la cohomotopía estable es una teoría de cohomología generalizada) es isomorfa a la completación del anillo de Burnside de G respecto a su ideal de aumentación. Esta conjetura fue probada por Carlsson (1985) usando teorías equivariantes, es decir teorías para espacios con una acción de un grupo.

Algunas relaciones de la topología algebraica con otros campos

A partir de la topología algebraica han sido creadas dos nuevas ramas de las matematicas, que han seguido su propio desarrollo y han tenido influencia, a su vez, en otras teorías matemáticas. Una es la teoría de categorías de la que ya hablamos un poco y la otra es el álgebra homológica.

Dentro del álgebra homológica mencionaremos a la (co)-homología de grupos. El punto de partida es el trabajo de Hurewicz (1935), en que demuestra que los grupos de homología de un espacio K, cuyo grupo fundamental es G, y todos sus demás grupos de homotopía son cero, depende sólo de G. Ya mencionamos que a estos espacios se les llama Eilenberg-MacLane y se denotan por $K = K(G,1)$. Estos espacios son únicos salvo homotopía y por lo tanto cualquier invariante homotópico de K, como la (co)-homología es un invariante de G. Sin embargo el problema de determinar los grupos de homología a partir del grupo G quedó abierto hasta que Hopf (1941) da la relación entre G y $H_2(K)$. El no sólo prueba los primeros teoremas de la teoría, sino que también introduce la idea de resolución, que es fundamental en el álgebra homológica. Este tipo de ideas fueron también desarrolladas en la misma época (quizá por la falta de comunicación durante la guerra) por Eilenberg y MacLane, por H. Freudenthal y por B. Eckmann.

La (co)-homología de grupos ha sido muy importante en problemas algebraicos, por ejemplo en la teoría algebraica de números.

Otra teoría de gran importancia en topología y en álgebra es la teoría K algebraica de Quillen (1972). Dado un anillo A (asociativo con 1) se definen los grupos $K_i^{alg}(A) = \Pi_i(BGL^+(A))$, donde $BGL^+(A)$ es un cierto espacio asociado a A. Esta construcción extiende los grupos ya conocidos $K_0^{alg}(A)$ (construidos a partir de $A-$módulos proyectivos finitamente generados) y $K_1^{alg}(A)$ (un cociente del grupo general lineal $GL(A)$). Desde el punto de vista topológico hay invariantes relacionados con la teoría de homotopía simple de J. H. C. Whitehead, con cobordismo, con pseudoisotopía y con cirugía, que tienen valores en estos grupos. Recientemente se han encontrados numerosas relaciones con teoría de números, con geometría algebraica y con análisis.

Un campo que ha tenido una relación muy estrecha con la topología es la geometría algebraica. En una variedad (no-singular sobre los complejos) tenemos varias estructuras presentes, a saber, algebraica, analítica, diferenciable y topológica. Entonces podemos estudiar sus invariantes topológicos y luego tratar de interpretarlos en términos de otras estructuras. Ya mencionamos que la cohomología, con coeficientes enteros digamos, es un invariante de la estructura topológica, si ahora consideramos cohomología con coeficientes en una gavilla, por ejemplo en la gavilla de funciones holomorfas, los grupos que obtenemos son invariantes no sólo topológicos sino también de la estructura analítica. De esta manera se unen los problemas topológicos y analíticos.

También nos podemos preguntar por una espresión puramente algebraica de la cohomología. Este proyecto fue llevado a cabo por Grothendieck.

Además podemos mencionar que el álgebra homológica ha jugado un papel muy importante en la geometría algebraica, por ejemplo a través de las sucesiones espectrales que son un método de cálculo muy poderoso tanto en topología como en álgebra, como en geometría.

Una teoría que ha tenido aplicaciones en varios campos es la homología de intersección de Goresky y MacPherson (1980). Como ya mencionamos Poincaré probó la existencia de una dualidad en la homología de variedades cerradas, esta dualidad se puede expresar como un isomorfismo entre la homología y la cohomología, a saber, $H_i(M) \cong H^{n-i}(M)$, donde n es la dimensión M. Por medio de este isomorfismo podemos pasar el producto que hay en cohomología a la homología, lo cual nos da una función bilineal no degenerada $H_i(M) \times H_j(M) \to H_{i+j-n}(M)$ llamada producto de intersección. Si las clases de homología están dadas por subvariedades de M, su producto de intersección está dado por su intersección transversal. Esta es la forma como Poincaré expresó originalmente su dualidad. Es fácil ver que si la variedad tiene singularidades este teorema es falso. La idea de la homología de intersección es construir una teoría de homología donde exista un producto de intersección en variedades con singularidades. Esta teoría, que se denota por $IH_*(-)$, se define usando las estratificaciones de Whitney y es un invariante topológico pero no es un invariante de homotopía. Además, si M no tiene singularidades $IH_*(M) \cong H_*(M)$.

Como en la definición de variedad analítica se acepta que existan singularidades, esta teoría tiene aplicación en geometría algebraica. Sin embargo también ha sido usada en representaciones de álgebras de Hecke, en representaciones de álgebras de Lie, en análisis, en teoría de inmersiones, etc.

La topología algebraica siempre ha tenido un relación muy estrecha con la geometría diferencial. Esta relación entre la topología y la geometría de una varidedad Riemanniana se puede ver en el "Teorema de la curvatura total" de Hopf(1925) que generaliza el teorema de Gauss-Bonnet en dimensión 2 y que dice lo siguiente : **Si M^n es una hipersuperficie compacta (orientable), con n par, cuya curvatura gaussiana en cada punto denotamos por $K(p)$, entonces $\frac{1}{c_n}\int_M K(p)dp = \frac{1}{2}\chi(M)$ (donde c_n es el volumen de S^n).** Otro ejemplo es el teorema de Morse (1934) que relaciona el número de geodésicas en una variedad Riemanniana M, con la homología del espacio de lazos de M,

$\Omega M = \{$ mapeos de $S^1 \to M$ que envían un punto base de S^1 en un punto base de $M\}$,

a saber: **Si p y q son dos puntos en una variedad Riemanniana M, completa y conexa y si para algún campo K, $H_i(\Omega M; K)$ es no trivial para una infinidad de valores de i, entonces hay una infinidad de segmentos geodésicos que unen p y q.**

Una de las primeras aplicaciones espectaculares de la teoría de homotopía a la geometría diferencial es el siguiente resultado de Serre (1951) que da una condición sobre $H_*(M; K)$, que implica que $H_i(\Omega M; K)$ sea no trivial para una infinidad de valores de i. **Supongamos que X es un complejo CW finito y simplemente conexo**

(es decir, $\pi_1(X) = 0$) y que $H_*(X;K)$ es no trivial en toda dimensión, entonces $H_i(\Omega X;K)$ es no trivial para una infinidad de valores de i (este resultado se obtiene usando la sucesión espectral de Leray-Serre asociada a una fibración).

Entre los teoremas que hemos visto que tienen relación con el análisis podemos mencionar el teorema del índice para operadores elípticos de Atiyah-Singer y y los teoremas de punto fijo, ya que las soluciones de ecuaciones muchas veces son puntos fijos de ciertas funciones.

Una teoría en la que se unen topología, geometría diferencial y análisis es la cohomología de De Rham. Dada una variedad diferenciable (compacta) M, las p–formas diferenciales en M, $\Omega^p(M)$, forman un espacio vectorial real y con la diferencial $d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ se obtiene un complejo de cocadenas cuya homología es la cohomología de De Rham. Integrando las formas, obtenemos un isomorfismo entre esta cohomología y la cohomología singular con coeficientes reales. Con una estructura riemanniana en M se pueden definir las formas armónicas y por el teorema de Hodge, la cohomología definida con formas armónicas coincide con la de De Rham. Esta teoría nos da un marco para el estudio de ecuaciones diferenciales en variedades y ha sido muy útil para expresar muchos conceptos de la física (ecuaciones de Maxwell, de Yang-Mills, etc.).

Existen teorías que permiten estudiar las variedades de dimensión mayor o igual a 5 y el caso de dimensión 1 y 2 se conoce desde hace mucho tiempo, así pues, los problemas más difíciles parecen estar en dimensiones 3 y 4. A continuación mencionaremos un resultado sobre variedades de dimensión 4, debido a S. Donaldson (1983), en el cual se mezcla la topología algebraica, la geometría diferencial, el análisis y la física matemática.

Un invariante muy importante en el estudio de variedades de dimensión 4 (orientables) es la forma de intersección, que ya mencionamos antes, $H^2(M) \times H^2(M) \to \mathbb{Z}$ (usando dualidad de Poincaré se puede escribir también en homología). En 1949, J. H. C. Whitehead probó que el tipo de homotopía de una variedad de dimensión 4, cerrada, simplemente conexa está completamente determinado por la clase de isomorfismo de la forma de intesección.

El problema ahora, consiste en determinar qué formas bilineales simétricas aparecen como formas de intersección de variedades. En este caso hay una diferencia esencial si se consideran variedades diferenciables o el concepto más general de variedad topológica (en la cual los cambios de coordenadas no son necesariamente diferenciables), así que tendremos mucho cuidado en hacer la distinción. Como ejemplo de forma de intersección tenemos la del plano proyectivo complejo CP^2, que es una variedad diferenciable de dimensión 4. Como $H^2(CP^2) \cong \mathbb{Z}$, la matriz asociada a la forma es (1).

El teorema de Donaldson afirma que **si M es una variedad diferenciable de dimensión 4, compacta, simplemente conexa con una forma de intersección definida positiva φ entonces φ es equivalente, sobre los enteros, a la forma estándar.**

Se puede probar (usando la invariancia del índice de la forma bajo cobordismo) que, si M es cobordante a una unión de planos proyectivos, entonces se obtiene la afirmación del teorema. Así pues, el problema consiste en construir una variedad diferenciable de dimensión 5, W tal que $\partial W = M \amalg CP^2 \amalg \ldots\ldots \amalg CP^2$. La idea de Donaldson es que esta variedad la podemos encontrar en la naturaleza y es aquí donde entran las ecuaciones de Yang-Mills.

En física los fotones aparecen como los cuantos de la teoría electromagnética de Maxwell y lo que se busca en la teoría cuántica de campos es que las partículas elementales aparezcan por cuantización de teorías de campo adecuadas. Para este efecto se han creado las teorías de norma (gauge theories) y las ecuaciones de Yang-Mills son la generalización de las ecuaciones de Maxwell.

El grupo S^1 que interviene en la teoría de Maxwell es generalizado a otros grupos de Lie compactos no-abelianos como $SU(2)$.

La teoría matemática para estudiar las teorías de norma es la teoría de haces fibrados y conexiones. Los haces fibrados (Ehresman-Feldbau (1942), Steenrod(1950)) son una generalización de los haces vectoriales y se construyen a partir de un haz principal $p : E \to B$, con fibra un grupo topológico G, y de una acción en la fibra $G \times F \to F$. De esta manera un haz vectorial se obtiene de un haz principal con fibra H, donde H es un subgrupo del grupo general lineal y de una representación $H \times V \to V$, donde V es un espacio vectorial.

Si $p : E \to B$ es un haz principal con fibra un grupo de Lie G y E y B son variedades diferenciables ($dimB = b$), una conexión en P es una función diferenciable que asocia a cada punto $y \in E$ un subespacio de dimensión b del espacio tangente a E en y, transversal a la fibra e invariante bajo la acción de G.

Consideremos un haz principal $p : E \to S^4$ con fibra $SU(2)$. Nos interesan las conexiones en p, módulo la acción del grupo de norma. Este es el grupo de difeomorfismos $\varphi : E \to E$ que conmutan con la proyección y que son $SU(2)$ equivariantes. El problema es encontrar las conexiones cuya curvatura satisface las ecuaciones de Yang-Mills. En 1978 Atiyah-Hitchin y Drinfeld-Manin construyeron soluciones para las ecuaciones de Yang-Mills llamadas instantones, utilizando la geometría "twistorial" de Penrose.

Esta es una herramienta que permite transformar problemas concernientes a ecuaciones de campo en problemas de varias variables complejas, geometría algebraica y topología algebraica. Es posible también dar información sobre la topología del espacio de instantones $\mu(S^4)$, por ejemplo, si la segunda clase de Chern de p es -1, $\mu(S^4)$ es la bola abierta de dimensión 5 (Atiyah-Hitchin-Singer). Para construir la variedad W, que mencionaremos antes, se considera sobre M el único (salvo isomorfismo) haz principal $q : X \to M$, cuya segunda clase de Chern es -1. Se prueba que $\mu(M)$ es una vecindad de dimensión 5, con singularidades. Las singularidades tienen vecindades que se ven como un cono sobre CP^2 y en $\mu(M)$ hay una copia de M lo que permite construir el cobordismo C y así probar el teorema. El estudio de la topología de los espacios de instantones continúa. Por ejemplo un teorema de Atiyah y Jones da una equivalencia de homotopía entre los espacios $\mu(S^4)$ y los espacios de lazos $\Omega^3 S^3$. Esto permite usar la maquinaria de espacios de lazos de May y las operaciones de Dyer-Lashof para estudiarlos.

Así pues, el desarrollo de conceptos fundamentales de la física en este siglo está ligado a teorías matemáticas muy importantes :

Relatividad especial - espacio-tiempo de 4 dimensiones

Relatividad general - geometría Riemanniana

Mecánica cuántica - espacios de Hilbert

Teorías de norma - haces fibrados

Para hablar de un resultado sorprendente que se obtiene a partir de este teorema necesitamos mencionar el otro teorema importante sobre las variedades de dimensión 4. En este caso consideramos variedades topológicas (no necesariamente diferenciables) y su forma de intersección. El teorema nos dice que no hay restricción en las formas que pueden ser formas de intersección de 4-variedades, a diferencia del caso diferenciable que acabamos de ver. Con más precisión :

Teorema (Freedman, 1983): **Dada una forma bilineal simétrica y unimodular sobre los enteros φ, existe una variedad topológica, compacta, simplemente conexa, de dimensión 4, M_φ cuya forma de intersección es φ. Además, si φ es par, M_φ es única salvo homeomorfismo. Si φ es impar hay exactamente dos variedades M_φ no homeomorfas cuya forma de intersección es φ, caracterizadas por el hecho de que para una de ellas $M_\varphi \times S^1$ tiene una estructura diferenciable y la otra no.**

Este teorema se prueba utilizando las técnicas de la parte de la topología conocida como topología geométrica. Como corolario se tiene la conjetura de Poincaré en dimensión 4 : **Si N es una variedad de dimensión 4, compacta, sin frontera, del mismo tipo de homotopía que S^4 entonces es homeomorfa a S^4.**

En cada espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, $n \neq 4$ existe una única estructura diferenciable (salvo difeomorfismo). Utilizando los 2 teoremas anteriores, el de Donaldson y el de Freedman, se puede probar el siguiente resultado. **En $\mathbb{R}^4$ existe una estructura diferenciable distinta de la usual, es decir, existe una variedad diferenciable $\Re^4$ que es homeomorfa a $\mathbb{R}^4$ pero no difeomorfa a $\mathbb{R}^4$.** De hecho, basado en este resultado, Taubes (1987) probó que existe un conjunto no numerable de estructuras diferenciables distintas de $\mathbb{R}^4$. ¡Una cantidad no numerable de formas distintas de hacer cálculo en $\mathbb{R}^4$!

Finalmente mencionaremos el caso de la reciente conexión entre álgebras de Von Neumann y teoría de nudos. Las álgebras de Von Neumann, que son álgebras de operadores en un espacio de Hilbert, fueron desarrolladas en los treintas, en relación con la mecánica cuántica. Recientemente se descubrió que con ellas se puede definir un nuevo invariante para nudos (ver la sección de topología geométrica) que es un polinomio similar al ya conocido polinomio de Alexander. Estos nuevos invariantes están siendo utilizados en biología para estudiar los nudos y enlaces formados por las moléculas de DNA.

El propósito de esta nota fue el de hacer una breve presentación de las ideas básicas de la topología algebraica y de su desarrollo, con el objeto de proporcionar un marco de referencia adecuado a las contribuciones hechas por los miembros del Instituto. Por falta de espacio, muchos temas importantes no pudieron ser mencionados, sin embargo esperamos haberle mostrado al lector algo de la gran vitalidad de esta rama de las matemáticas así como algunas de sus múltiples conexiones con otros campos del conocimiento.

M.A.

A continuación se encuentra un breve resumen de los trabajos en topología algebraica hechos por los investigadores del Instituto. En el caso del Dr. Vázquez, dada la vastedad de su obra, se presentará sólo, un resumen de uno de sus trabajos representativos en el área de topología categórica.

COBORDISMO E INMERSIONES

Marcelo Aguilar

Un problema fundamental en la topología es la clasificación de variedades diferenciables. La relación más natural sería la de difeomorfismo, pero mientras que esta clasificación se ha logrado en dimensiones 1 y 2, para dimensiones mayores el problema es sumamente complicado. En 1954, R. Thom introdujo una relación más débil llamada cobordismo, que permite estudiar este problema.

Dadas dos variedades diferenciables compactas y sin frontera M, N de dimensión n, decimos que son cobordantes si existe una variedad compacta V cuya frontera es difeomorfa a la unión ajena de M y N. Al conjunto de clases de equivalencia de n-variedades módulo cobordismo se le denota $\mathcal{N}_n$. Usando la unión ajena y el producto de variedades le podemos dar a $\mathcal{N}_*$ una estructura de anillo graduado. Ahora tenemos 3 problemas básicos:

1.- Determinar la estructura algebraica del anillo $\mathcal{N}_*$

2.- Expresar la estructura algebraica en términos geométricos

3.- Definir invariantes algebraicos que permitan decir si dos variedades son cobordantes.

El primer problema lo resolvió Thom probando que

$\mathcal{N}_* \cong \mathbb{Z}_2[x_2, x_4, x_5, x_6, x_8, ..., x_r, ...]$ ($r \neq 2^t - 1$). En 1956, Dold construyó variedades que representan a los generadores x_i, resolviendo así el segundo problema.

El tercer problema también lo resolvió Thom probando que dos variedades son cobordantes si y sólo si sus números de Stiefel-Whitney son iguales.

Ahora podemos extender la relación de cobordismo en forma natural para clasificar diversos tipos de morfismos entre variedades. Wall (1961) estudió el caso de encajes y Stong (1965) el caso de mapeos arbitrarios.

Denotemos por $I(n, k)$ a las clases de cobordismo de inmersiones de variedades de dimensión n en variedades de dimensión $n + k$. Se le puede dar a $I(*, k)$ una estructura de álgebra sobre el anillo $\mathcal{N}_*$ así que en este caso tenemos 3 problemas básicos semejantes al caso clásico. En 1970 P. Schweitzer probó que $I(*, k)$, $k > 0$, es una álgebra de polinomios sobre $\mathcal{N}_*$ con un número infinito de variables, cuyos índices son ciertas sucesiones finitas de enteros.

En [1] se construyen 2 familias distintas de inmersiones que son generadores polinomiales de $I(*, k)$, para cada $k > 0$, usando los espacios de lazos infinitos de P. May y los mapeos de transferencia.

En [2] se definen invariantes algebraicos para una inmersión y se prueba que dos inmersiones son cobordantes si y sólo si estos invariantes son iguales. También se da una expresión del cobordismo de inmersiones en términos de espacios cubrientes y de haces vectoriales sobre el espacio total del cubriente y se ve la relación con la función de transferencia de Atiyah. Utilizando los invariantes algebraicos se prueban algunos resultados acerca de la reducción del grupo estructural, módulo cobordismo, de estos haces.

Otro problema que se ha estudiado es la aproximación de funciones entre variedades por funciones cuyo comportamiento se entiende mejor.

Sea $f : M \to N$ una función entre variedades diferenciables de dimensión n y $n+k$ respectivamente. En 1936, Whitney probó que si $k \geq n$ entonces f es homotópica a una inmersión. En [3] se prueba que si $k = n - 1$, f es también homotópica a una inmersión, usando unicamente teoría clásica de obstrucciones. En los demás casos el resultado no es cierto.

En [4] se estudia el problema de aproximar un mapeo $f : M \to N$ entre variedades por medio de encajes, módulo cobordismo y se dan condiciones en términos de los números característicos asociados a f.

En [5] se prueba, con métodos geométricos, que ciertas operaciones homológicas en monoides topológicos abelianos son cero.

MAPEOS DE TRANSFERENCIA

Trataremos aquí una de las líneas de investigación de **Mónica Clapp**.

Los homomorfismos de transferencia tienen su origen en el trabajo de B. Eckmann (1953). Si $p : E \to B$ es una aplicación cubriente de n hojas, se define $\tilde{p} : C_m(B) \to C_m(E)$ (donde $C_m(.)$ es el grupo de m-cadenas singulares) asociando a cada m-simplejo singular σ, $\sum_{i=1}^{n} \tilde{\sigma}_i$ donde $\tilde{\sigma}_i$ recorre los n levantamientos de σ. Esto define una transformación de cadenas y por lo tanto induce homorfismos $p^! : H_m(B) \to H_m(E)$ y $p_! : H^m(E) \to H^m(B)$ llamados homomorfismos de transferencia; que van en sentido opuesto a los homomorfismoos usuales p_* y p^* inducidos por la proyección p y que tienen la siguiente propiedad: $p_! \circ p^*$ =multiplicación por n, y $p_* \circ p^!$ =multiplicación por n.

Si G es un grupo finito y H es un subgrupo de índice n, podemos construir una aplicación cubriente de n hojas, $p : BH \to BG$ cuyos homomorfismos de transferencia son los que ya se conocían en (co)-homología de grupos.

Esta construcción puede ser generalizada en 2 direcciones. Se puede considerar el caso de mapeos más generales que aplicaciones cubrientes como son haces fibrados o fibraciones y se pueden considerar otras teorías de cohomología distintas de la singular.

En 1961 Atiyah definió un homomorfismo de transferencia para aplicaciones cubrientes en teoría K.

En 1972 Roush, Kahn y Priddy construyeron, para aplicaciones cubrientes $p : E \to B$, un mapeo de transferencia $\tau_p : S^\infty(B^+) \to S^\infty(E^+)$, donde $S^\infty(X^+)$ es el espectro de suspensión de la unión ajena de X y un punto, que permite definir homomorfismos de transferencia para cualquier teoría de (co)-homología tomando los homomorfismos inducidos τ_{p*} y τ_p^*.

En 1975 Gottlieb definió un homomorfismo de transferencia para haces fibrados lisos, con fibra una variedad compacta, en (co)-homología singular. En este caso la composición del homomorfismo inducido por la proyección del haz con el homomorfismo de transferencia es igual a multiplicar por la característica de Euler de la fibra $\chi(F)$.

En 1976 Becker y Gottlieb definieron un mapeo de transferencia

$\tau_p : S^\infty(B^+) \to S^\infty(E^+)$ para fibraciones p, cuya base tiene el tipo de homotopía de un complejo CW de dimensión finita y cuya fibra tiene el tipo de homotopía de un complejo CW finito. Esto nos da homomorfismos de transferencia en cualquier teoría de (co)-homología. Para construirlo se hace teoría de homotopía y dualidad de Spanier-Whitehead en la categoría de James de espacios sobre un espacio base.

Para quitar la restricción de que las fibraciones tienen que tener base de dimensión finita, lo cual restringe mucho las aplicaciones del teorema, se construye en [Clapp, Puppe 1984] una categoría de espectros sobre un espacio base y se prueba que es una categoría monoidal simétrica con respecto al producto "smash".

En [Clapp 1981] se define un mapeo de transferencia para fibraciones cuya base tiene el tipo de homotopía de un CW arbitrario y cuya fibra tiene el tipo de homotopía estabPle de un CW finito, construyendo duales en la categoría de espectros sobre un espacio base. Con esto se prueba que $E^*(BG)$ es un sumando directo en $E^*(BN)$ para cualquier teoría de cohomología $E^*(.)$, donde G es un grupo de Lie compacto y N es el normalizador de un toro máximo.

M. A.

TOPOLOGIA ALGEBRAICA Y TEORIA DE PUNTO FIJO

Carlos Prieto

Sucesiones espectrales y transferencia

Para una "fibración" $\pi : E \to B$ y una teoría de cohomología h hay **homorfismos de transferencia** $\tau : h(E) \to h(B)$, que son una especie de "inversos multivaluados" de π. Dada una filtración de la base B, $\mathcal{B}$: $B^0 \subset B^1 \subset ... \subset B^n \subset ... \subset B$, y la correspondiente filtración de E, $\mathcal{E}$: $E^0 \subset E^1 \subset ... \subset E^n \subset ... \subset E$ de imágenes inversas bajo π, hay sucesiones espectrales $E_r^{pq}(\mathcal{B})$, $E_r^{pq}(\mathcal{E})$ que "aproximan" a $h(B)$ y $h(E)$. El homomorfismo τ *determina* $E_r^{pq}(\mathcal{E}) \to E_r^{pq}(\mathcal{B})$ ([Prieto,1982 a]). Especializando las fibraciones y las filtraciones, se obtienen sucesiones espectrales especiales ([Prieto, 1979],[Prieto, 1984 a]). Si, por ej. $\pi : EG \times_G F \to BG$ es la fibración con fibra F asociada al G-haz principal universal, la filtración de Milnor de BG da origen a sucesiones espectrales para toda h. En muchos casos se puede identificar el término E^2 generalizando los resultados de Rothenberg y Steenrod en (homología y) cohomología ordinarias, ([Prieto,1983 a]). En este caso ([Prieto, 1987 b]) o en el de la sucesión espectral de Serre la transferencia es compatible con los términos E^2; esto último permite generalizar resultados de Atiyah sobre cohomología de grupos, ([Prieto, 1982 a]).

Teoría FIX y cohomotopía

A través de ciertas situaciones de punto fijo "sobre B" Dold definió un grupo $FIX(B)$ y probó que describe la 0-cohomotopía estable de B; esto permite estudiar la conjetura de Segal sobre el anillo de Burnside desde otro punto de vista, ([Prieto, 1981],[Prieto, 1982 b]). Es posible describir situaciones de coincidencia sobre B y con ellas definir $FIX^k(B)$ para toda k. Esto da una descripción de la cohomotopía estable en el mismo espíritu que la teoría K ([Prieto, 1984 b]). Este acceso permite asimismo generalizaciones al caso equivariante respecto a acciones de grupos de Lie compactos ([Prieto, 1987 a]) e incluso al caso de diagramas de situaciones de punto fijo o coincidencia ([Prieto 1986],[Prieto 1987 c]). Hay una extensión del resulatado de Carlsson, que demuestra la conjetura de Segal ([Prieto, 1987 a]).

Fluidificación de carcajes

Para el estudio de la teoría FIX de diagramas se necesita una generalización del teorema de extensión de Tietze para diagramas de aplicaciones continuas (representaciones topológicas de carcajes). Con hipótesis adecuadas sobre los carcajes se tiene tal generalización, que utiliza un proceso de modificación de los carcajes llamado **fluidifación.**

Fórmulas de traza de Lefschetz-Hopf

Es posible generalizar el teorema clásico de punto fijo de Lefschetz-Hopf, que identifica al índice de punto fijo como una traza, a situaciones de coincidencia que incluso involucran acciones de grupos ([Prieto, 1987]); de hecho se generaliza el teorema de la traza de Dold al caso equivariante y de grado distinto de cero ([Prieto 1987]).

INTERSECCIONES DE SUBCATEGORIAS MONOCORREFLEXIVAS DE CATEGORIAS ARBITRARIAS

Roberto Vázquez

En lo que sigue $\underline{K}$ denotará una categoría arbitraria y M la clase de $\underline{K}$-monomorfismos. Sea $\underline{A}$ una $\underline{K}$-subcategoría, una $\underline{A}$-**monocorreflexión** del $\underline{K}$-objeto X es un monomorfismo $m : A \to X$, donde $A \in \underline{A}$, con la propiedad siguiente: para todo morfismo $f : A' \to X$, con A' en $\underline{A}$, existe un morfismo (necesariamente único)

$f' : A' \to A$ tal que $mf' = f$.

Si $\underline{A}$ es subcategoría plena y repleta de $\underline{K}$ y todo $\underline{K}$-objeto X posee una $\underline{A}$-monocorreflexión, se dice que $\underline{A}$ es una subcategoría **monocorreflexiva de** $\underline{K}$ o que es M-**correflexiva**. Ejemplos bien conocidos de subcategorías M-correflexivas (aparte de la categoría total) son:

(a) $\underline{K}$ es la categoría de grupos abelianos, $\underline{A}$ es la categoría de los grupos abelianos de torsión.

(b) $\underline{K}$=**Top**, $\underline{A}$ es la categoría de los espacios localmente conexos.

(c) $\underline{K}$=**Top**, $\underline{A}$ es la categoría de los espacios compactamente generados (k-espacios).

(d) $\underline{K}$=**Top**, $\underline{A}$ es la categoría de los espacios finitamente generados (= espacios en donde intersecciones arbitrarias de abiertos son subconjuntos abiertos).

(e) $\underline{K}$=**Top**, $\underline{A}$ es la categoría de los espacios discretos.

(f) $\underline{K}$ es la categoría de los conjuntos parcialmente ordenados y funciones monótonas, $\underline{A}$ es la categoría de los conjuntos parcialmente ordenados triviales.

Denotaremos con $\mathbf{A}$ al conglomerado de las subcategorías M-correflexivas de $\underline{K}$. Una pregunta natural es: ¿está $\mathbf{A}$ cerrado bajo la formación de intersecciones arbitrarias?. El objeto de esta nota es caracterizar a las categorías $\underline{K}$ en donde $\mathbf{A}$ tiene la propiedad anterior y describir, para cualquier $\underline{K}$-subcategoría, a la subcategoría M-correflexiva generada por ella. Para esto es necesario introducir varios conceptos auxiliares, a saber:

Sea $\mathbf{B}$ un conglomerado cualquiera de $\underline{K}$-subcategorías

(a) $\mathbf{S}(\mathbf{B})$ denotará al conglomerado de $\underline{K}$-sumideros (clases de $\underline{K}$-morfismos con codominio común) con la siguiente propiedad: $S \in \mathbf{S}(\mathbf{B})$ si y sólo si $domS \subset \underline{B} \in \mathbf{B}$ implica que $codS \in \underline{B}$. ($domS$ es la clase de los dominios de los elementos de S, $codS$ es el codominio común de los elementos de S)

(b) Si $\mathbf{S}$ es un conglomerado arbitrario de $\underline{K}$-sumideros entonces $\underline{A}$ está $\mathbf{S}$-**enmarcada** si para todo $S \in \mathbf{S}$ tal que $domS \subset \underline{A}$ resulta $codS \in \underline{A}$.

(c) $\mathbf{B}$ está **saturado** si toda subcategoría $\mathbf{S}(\mathbf{B})$-enmarcada pertenece a $\mathbf{B}$.

(d) $\underline{K}$ es **($\mathbf{S}(\mathbf{B})$,M)-factorizable** si para todo $\underline{K}$-sumidero S existen $S' \in \mathbf{S}(\mathbf{B})$ y $m \in M$ tales que $S = mS'$.

TEOREMA. Son equivalentes:

(a) $\mathbf{A}$ está cerrado bajo la formación de intersecciones arbitrarias.

(b) $\underline{K}$ es ($\mathbf{S}(\mathbf{A})$,M)-factorizable.

(c) $\mathbf{A}$ está saturado.

(d) Para toda $\underline{K}$-subcategoría existe la subcategoría M-correflexiva generada por ella.

(e) Si $\underline{A}$ es cualquier $\underline{K}$-subcategoría y $\hat{\underline{A}}$ es la que tiene por objetos aquellos que son codominios de miembros S de $\mathbf{S}(\mathbf{A})$ tales que $domS \subset \underline{A}$, entonces $\hat{\underline{A}} \in \mathbf{A}$.

COROLARIO 1. Si se cumple cualquiera de las condiciones anteriores entonces:

(a) $\underline{\hat{A}}$ es la subcategoría M-correflexiva generada por $\underline{A}$.

(b) Si $\underline{A}$ $\in\mathbf{A}$ y X es un $\underline{K}$-objeto arbitrario, una $\underline{A}$-correflexión de X es el miembro m de M tal que $S = mS'$, donde S es el sumidero de los morfismos de dominio en $\underline{A}$ y codominio X, y $S' \in\mathbf{S}(\mathbf{A})$.

COROLARIO 2. Sea $\underline{K}$ una categoría concreta, si $\underline{K}$ es ($\mathbf{E}$,M)-factorizable, donde $\mathbf{E}$ es el conglomerado de los $\underline{K}$-epimorfismos finales ($S \in\mathbf{E}$ si es $\underline{K}$-morfismo y toda función de $codS$ en cualquier $\underline{K}$-objeto, cuya composición con cualquier elemento de S es $\underline{K}$-morfismo), entonces $\mathbf{A}$ está cerrado bajo la formación de intersecciones arbitrarias.

APLICACION. Si $\underline{K}$ es una subcategoría plena de **Top** tal que $(X,\tau) \in \underline{K}$ implica $(X,\tau') \in \underline{K}$ para toda topología τ' de X, más fina que τ, entonces $\mathbf{A}$ está cerrado bajo la formación de intersecciones arbitrarias (v.gr.: $\underline{K}$ =**Top** o T_i para $i = 0,1,2$).

Ejemplo de una categoría $\underline{K}$ en donde $\mathbf{A}$ no está cerrado bajo la formación de intersecciones finitas:

$\underline{K}$ tiene dos objetos A y B, los $\underline{K}$-morfismos son: $hom(A,A) = \{a_n|n \geq 0\}$, $hom(B,B) = \{b_n|n \geq 0\}$, $hom(A,B) = \{f_m|m \geq 1\}$, $hom(B,A) = \{g_m|m \geq 1\}$.

La composición de $\underline{K}$-morfismos es tal que índice de xy =índice de x + índice de y.

Se tiene:

(i) Todo $\underline{K}$-morfismo es bimorfismo.

(ii) $\mathbf{A}$ tiene sólo tres miembros, a saber: $\underline{K}$, A y B. La A-correflexión de B es f_1, la B-correflexión de A es g_1.

TOPOLOGIA GENERAL

El objeto de estudio de la topología general son los espacios en los que es posible decir si un punto está en la orilla de un subconjunto, en su interior o en su exterior. Estos espacios son llamados espacios topológicos.

Para un espacio topológico se pueden definir, entre muchos otros conceptos, los siguientes:

(*a*) Si consta de una sola pieza (conexidad) o de varias.

(*b*) Si hay caminos para ir de un punto a cualquier otro del espacio (arco-conexidad).

(*c*) Si los puntos del espacio están bien separados unos de otros y si un punto que está en el exterior de un conjunto está bien separado de él (axiomas de separación).

(*d*) Si el espacio tiene la propiedad de que cuando se dan una infinidad de saltos siempre hay un punto por el que se pasa cerca muchas veces (compacidad).

(*e*) Si el espacio es flaco, aplanado, etc. (dimensión).

(*f*) Si el espacio no tiene agujeros (unicoherencia).

Una parte importante de la topología general es la que estudia las funciones que preservan estas propiedades.

En sus orígenes este tipo de topología recibía el sugestivo nombre de Analysis Situs, sugerido por Leibinz y adoptado por Riemann quien es considerado por muchos como el creador de la Topología. El fue el primero que trató de formular el concepto de espacio topológico; concibió la idea de una teoría autónoma de estos espacios; definió invariantes topológicos importantes y fue el primero que la aplicó al Análisis.

Los conceptos de punto interior, punto frontera, punto de acumulación, etc.; fueron definidos por Cantor para los espacios Euclidianos. Posteriormente, se hicieron varios intentos de definir cuáles eran los espacios más apropiados en los que se pudieran manejar este tipo de ideas. En 1906 Frechet define los espacios métricos. En 1908 Ries axiomatiza la noción de punto de condensación. En 1913 Weyl sugiere el uso de vecindades para definir a los espacios topológicos. Finalmente, en 1914, Hausdorff da una brillante axiomatización de la noción de vecindad fundando así una teoría moderna de la Topología General. La axiomatización de espacio topológico como se usa en la actualidad fue dada por Bourbaki en 1940.

A. García-Máynez

GENERALIZACIONES DE LOS CONCEPTOS DE FUNCION CERRADA Y DE CONJUNTO C-ENCAJADO

Las funciones continuas y cerradas preservan algunas importantes propiedades topológicas como la normalidad, la paracompacidad y la conexidad local. Los Z-mapeos y los WZ-mapeos proporcionan algunas generalizaciones interesantes. En este tema he introducido algunas generalizaciones más, como los EC_0, EC_1 y SP mapeos y he estudiado las relaciones entre ellas. De hecho, parece claro que las propiedades de encajamiento de las fibras de estos mapeos proporcionan una importante informacíon del mapeo mismo. Entre otras cosas he estudiado la invariancia de los conjuntos C_1-encajados bajo ciertos mapeos y la invariancia de la realcompaciadad bajo mapeos SP.

CLASES DE ESPACIOS TOPOLOGICOS PRESERVADAS BAJO REALCOMPACTIFICACIONES

Este tema lo he desarrollado conjuntamente con el Dr. Richard G. Wilson.

Un resultado muy conocido de Topología establece que un espacio de Tychonoff X es un P-espacio si y sólo si su realcompactificación vX es un P-espacio. Se conocen pocas propiedades preservadas por el funtor v (la conexidad es una de ellas). En particular, vX no es primero numerable a menos que X sea realcompacto y primero numerable. Hemos estudiado dos clases de espacios topológicos: los c-espacios y los c'-espacios, ambas invariantes respecto a productos y al funtor v, y que contienen a la clase de espacios primero numerables (de hecho, contienen a la clase de k-espacios). Curiosamente, estos espacios se complementan, en varias formas, con la clase de P-espacios.

UNA σ-ALGEBRA FUERA DE LO COMUN

Existen, en todo espacio topológico (X,τ), tres σ-álgebras que merecen un estudio detenido. La más concida es la de Borel, o sea la generada por la topología τ. En segundo término aparece la σ-álgebra generada por $\tau \cup N$, en donde N denota la familia de subconjuntos densos en ninguna parte de X, la que claramente contiene a la de Borel. Existe una tercera, la menos conocida, y la cual ha atraído mi atención últimamente, y es la generada por los subconjuntos nulos de X. Esta última σ-álgebra está contenida en la de Borel y coincide con ella si X es metrizable. Sus miembros reciben el nombre de Z-conjuntos de Baire de X. Se sabe, entre otras cosas, que los Z-conjuntos de Baire de un espacio compacto y de Hausdorff son pre-imágenes perfectas de espacios métricos y separables, y que están C^*-encajados en el compacto. Poco es lo que se conoce de los Z-conjuntos de Baire en espacios no compactos y esto es por ahora mi área de estudio.

Alejandro Illanes

Mi trabajo de investigación se ha centrado en dos temas de topología general:

UNICOHERENCIA Y MULTICOHERENCIA

Un espacio topológico conexo X es **unicoherente** si no existen dos subconjuntos cerrados conexos H y K tales que $X = H \cup K$ y $H \cap K$ no es conexo. Intuitivamente, un espacio es unicoherente si no tiene hoyos como los de una circunferencia. Los ejemplos típicos de espacios unicoherentes son los espacios Euclidianos $\mathbb{R}^n$, la esfera, el plano proyectivo, etc.; y los ejemplos típicos de espacios que no son unicoherentes son las circunferencias, una dona, etc. Por supuesto que este concepto se generaliza midiendo el número de hoyos que tiene un espacio conexo X. Esto se hace así: Para $Y \subset X$ se define $b_0(Y) = \#($ de componentes de $Y)$-1 y entonces el **grado de multicoherencia**, $r(X)$, de X se define por:

$$r(X) = sup\{b_0(A \cap B) | A \text{ y } B \text{ son subconjuntos cerrados y conexos tales que } X = A \cup B\}$$

El trabajo que he hecho en este tema ha estado dirigido a encontrar formas de calcular el grado de multicoherencia de:

(*a*) Compactificaciones ;

(*b*) Productos;

(*c*) Productos simétricos y

(*d*) Algunos cocientes.

HIPERESPACIOS

En este tema se estudian espacios en los que los elementos no son puntos sino subconjuntos de un espacio (el cual casi siempre se supone métrico, conexo, compacto y con más de un punto). Los hiperespacios que más se trabajan son:

$$2^X = \{A \subset X | A \text{ es cerrado y no vacío}\}$$

y

$$C(X) = \{A \in 2^X | A \quad \text{es conexo}\}$$

Estos espacios se consideran con la métrica de Hausdorff. El espacio X puede ser pensado como subconjunto de $C(X)$ y 2^X identificándolo con el conjunto $\{\{x\} \in C(X) | x \in X\}$. Para el estudio de la estructura de los hiperespacios son especialmente útiles los mapeos de Whitney que son funciones que miden el tamaño de los conjuntos. Un mapeo de Whitney es una función continua $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ que en los puntos vale cero y si $A \subset B$ y $A \neq B$ entonces $\mu(A) < \mu(B)$. Mi trabajo en este tema se relaciona con:

(a) Estructura de $C(X)$;
(b) Propiedades de mapeos de Whitney;
(c) Retracciones entre hiperespacios.

TOPOLOGIA COMBINATORIA

Javier Bracho

Sus orígenes se remontan por lo menos a Euler y a su famosa fórmula $v-a+r=2$; aunque podría perseguirse hasta los griegos que sabían ya de los sólidos Plátonicos. Sus manifestaciones de Poincaré a la fecha han sido diversas, pero constantes. Y de nuevo, más que un área bien determinada por problemas específicos (que los ha tenido) se debería definir como una cierta sensibilidad o técnica para abordar los problemas.

Dentro de esta "sensibilidad" se puede mencionar el intento de J. H. C. Whithead en los 40's por hacer combinatoria a la teoría de homotopía; intento que no fructificó tal cual pero dio origen a la "Homotopía Simple". Más tarde, en los 50's, sí se logró "combinatorizar" la teoría de Homotopía, por medio de los complejos semisimpliciales (en este esfuerzo cabe destacar la labor de D. Kan). Los complejos semisimpliciales se han convertido en harramienta fundamental de la Teoría de Homotopía (y otras ramas como K-teoría algebraica, etc.) pues sin ser objetos combinatorios clásicos, tienen ese matiz combinatorio que permite concretizar construcciones y precisar definiciones. POr ejemplo, Bracho, usando estas técnicas, estudió la estructura de los espacios de clasificación más allá de su tipo de homotopía, incursionando combinatoriamente en lo que podría llamarse "su geometría".

Otra corriente matemática que se debe incluir en la Topología Combinatoria es la Topología PL (Lineal por Pedazos) que, con raíces antiquísimas, tiene sus inicios formales en los 50's con Zeeman a la cabeza, cobrando gran auje en los 60's. Aquí, usando a los complejos simpliciales como bastión y a las técnicas y argumentos combinatorios como método, se estudia la topología de las variedades PL, o, más en general, de los poliedros; se estudia a los espacios a través de sus triangulaciones. Bracho y L. Montejano con su trabajo sobre Triangulaciones Coloreadas de Variedades (mejor conocido en la vecindad como "el Tinker-Toy") recorren esta vía, pero en sentido contrario. El objeto de estudio ahora es la triangulación y su combinatoria, su topología es un dato o una incógnita y a veces una herramienta. El énfasis ahora está en la combinatoria (como al auge creciente de la computación también va acentuando en otras partes de las matemáticas). El resultado más pulido en esta dirección es el "Pambazo" que da condiciones combinatorias para que una triangulación coloreada sea la de una esfera; condiciones que en dimensión 3 equivalen a un fenómeno topológico fino de la triangulación: que su 1-esqueleto esté desanudado. Estos trabajos deben situarse en la confluencia de dos líneas de desarrollo de la matemática en México: por un lado la combinatoria, impulsada principalmente por V. Neumann, y por el otro lado la Topología Geométrica y de dimensiones bajas, donde destacan G. Torres y F. González-Acuña (Fico).

Los intereses de Fico son principalmente la topología en dimensión 3 y sus relaciones en la teoría combinatoria de grupos (sin hablar de problemas de decisión, teoría de juegos, y los pénaltis del mundial). Siempre ha trabajado en la teoría de nudos L, y la topología de dimensiones bajas. Su primer gran trabajo, resultado de su tesis (que hizo con R. H. Fox), formuló la conjetura de la Propiedad P (El único nudo que da una esfera de homotopía por medio de cirugía no trivial es el nudo trivial) y demostró que varias clases de nudos la tienen. Este artículo sigue siendo una de las referencias básicas para este problema. Ha seguido la teoría de nudos durante años, y recientemente ha colaborado con varios autores (Gordon y Whitten y otros) logrando mostrar que no existe un algoritmo para detectar si un L nudo $\mathbb{S}^n$ en $\mathbb{S}^n + 2$ con $n \geq 3$ es trivial (¡aunque existe para $n = 1$; $n = 2$ sigue sin respuesta!). También han dado una clasificación de los nudos clásicos cuyos grupos son hopfianos o cohopfianos.

TOPOLOGIA GEOMETRICA

Luis Montejano

La topología geométrica nace junto con la topología algebraica y la topología combinatoria a principios de este siglo. A medida que transcurre el tiempo va adquiriendo una personalidad propia - pero no separándose - básicamente en función del tipo de preguntas que hace y del tipo de respuetas que espera ante una misma problemática. Es decir, si a la topología algebraica le interesa, por ejemplo, levantar o extender funciones en homotopías, a la topología geométrica le interesan conceptos como los de homeomorfismo, encaje e isotopía. Un ejemplo es un problema del siglo pasado conocido ahora como el Teorema de la Curva de Jordan. Originalmente el problema consistía en probar que toda curva cerrada plana divide al plano en exactamente dos regiones. La topología geométrica se interesa además por saber si la región acotada es o no homeomorfa a un disco. A la larga esta pregunta da lugar a la conjetura y al teorema de Schoenflies que puede ser ubicado claramente dentro del ámbito de la topología geométrica. La conjetura de Schoenflies pregunta si toda $(n-1)$-esfera en $\mathbb{R}^n$ es frontera de una n-bola. Es M. Brown quien da una respuesta satisfactoria a esta conjetura. Su demostración dio origen a la teoría de descomposición de variedades, existencia de factores de variedades, funciones "cell-like", caracterización de variedades topológicas, el teorema de la doble suspensión, etc. - que finalmente es una de las partes esenciales de la demostración de M. Freedman de la Conjetura de Poincaré en dimensión 4. Otro ejemplo es la famosa Hauptvermutung. ¿Es cierto que toda n-variedad puede ser construida a partir de pedazos rectilíneos ? Mientras a la topología algebraica le interesa el problema en función de la utilidad que este hecho le puede ofrecer, para obtener resultados que le son más propios - homología, cohomología, etc. -, a la topología geométrica le interesa por sí mismo. Tan es así, que la topología algebraica se desentiende, por un tiempo del problema, pues es capaz de prescindir de él, mientras que la topología geométrica en conjunción con la topología combinatoria desarrollan en la mitad de los 50ś y los 60ś la topología PL con el propósito, entre otros, de probar la Hauptvermutung y la Conjetura de Poincaré en dimensiones altas. Como una muestra de la profunda unidad de las matemáticas - al igual que la conjetura de Poincaré en dimensión 4 - la Hauptvermutung es resuelto a finales de los 60's por Kirby y Siebermann usando una brillantísima mezcla de las técnicas desarrolladas por los topólogos geométricos y los topólogos algebraicos. La solución estuvo íntimamente ligada con la solución de un problema geométrico muy parecido a la conjetura de Schoenflies, conocido como la conjetura del anillo. Una vez que Kirby resuelve la conjetura del anillo, fue claro que los topólogos algebraicos (Siebenmann - Wall) tenían los ingredientes necesarios para dar una respuesta satisfactoria al problema del Hauptvermutung.

Uno de los topólogos geométricos que ha impulsado esta área es R. H. Bing, que tiene una infulencia grande de la escuela polaca de topología - Borsuk, Kuratowski, etc. - Como resultado más palpable de esta influencia está la teoría de topología en dimensión infinita - Q-variedades, etc. - que está íntimamente ligada con la Teoría de Continuos.

En México L. Montejano ha trabajado en estas áreas de topología geométrica, en particular sus resultados tienen que ver con reconocimiento de variedades topológicas, funciones "cell-like", Topología PL y Q-variedades.

En 1934, Lusternik y Schnirelmann estudiando problemas de máximos y mínimos, - Cálculo de Variaciones - en particular estudiando geodésicas de superficies, desarrollan una técnica que ahora se considera como uno de los orígenes del cálculo de variaciones global. Esta técnica les permite probar, entre otras cosas, que en una esfera con cualquier métrica riemanniana existen al menos tres geodésicas cerradas que no se intersectan a sí mismas. En este artículo llamado "Méthodes topologiques dans les problèmes variationels", Lusternik y Schnirelmann definen un invariante topológico llamado categoría, que básicamente acota y da información acerca de la topología del conjunto de puntos críticos de una funcional. Es por lo anterior, que este invariante ha recibido, a través del tiempo, la atención de muchos y muy variados topólogos como son: Borsuk, Hilton,Berteen, Fox, etc. En México, un grupo de topólogos, J. Bracho, J. C. Gómez Larrañaga, M. Clapp y L. Montejano abordan un nuevo punto de vista para estudiar este invariante. Este punto de vista - mucho más geométrico - pemite mejorar algunos resultados clásicos y ligarlos a otros invariantes topológicos que en las últimas fechas han demostrado ser de interés para problemas típicos de la topología geométrica, como es el problema de la no-colapsabilidad de poliedros contraíbles - Conjetura generalizada de Zeeman -.

[1] AGUILAR, M., GENERATORS FOR THE BORDISM ALGEBRA OF IMMERSIONS, TRANS. AMER. MATH. SOC. (POR APARECER).

[2] AGUILAR, M., MULTIPLE POINTS OF IMMERSIONS AND CHARACTERISTIC NUMBERS, ARCHIV DER MATHEMATIK (POR APARECER).

[3] AGUILAR, M., PASTOR, G., ON IMMERSIONS OF N-MANIFOLDS IN CODIMENSION N-I, JOURNAL OF THE AUS. MATH. SOC. (POR APARECER).

[4] AGUILAR, M., PASTOR, G., ON MAPS COBORDANT TO EMBEDDINGS, BOLETIN DE LA S.M.M. (POR APARECER).

[5] AGUILAR, M., DYER-LASHOF OPERATIONS ON TOPOLOGICAL ABELIAN MONOIDS, APORTACIONES MATEMATICAS Vol. 3 (1987).

[6] BRACHO, J., STRUCTURES (MANIFOLDS, BUNDLES,E TC.) ARE MORPHISM, PUBL. PREL. INST. MAT. UNAM (1983).

[7] BRACHO, J., EL TEOREMA DE MILNOR PARA ESPACIOS SIMPLICIALES (REALIZACION DE... MEM. SEMINARIO ESPECIAL DE TOPOLOGIA (1981) 1-22.

[8] BRACHO, J., STRONG CLASSIFICATION OF HAEFLIGER STRUCTURES, CONTEMP. MATH. (1982) 61-72.

[9] BRACHO, J., UNA FORMULA COMBINATORIA PARA LAS CLASES DE STIEFEL-WHITNEY, MEM. TALLER TOP. ALG. IV COL. CINVESTAV, (1985).

[10] BRACHO, J., HAEFLIGER STRUCTURES AND LINEAR HOMOTOPY, TRANS. AMER. MATH. SOC. (1984) 522-538.

[11] BRACHO, J., TRIANGULACIONES COLOREADAS DE ESFERAS, APORTACIONES MAT. (1986) 125-133.

[12] BRACHO, J., GOMEZ, J.C., CYCLIC CRYSTALLIZATIONS OF SPHERES, MANUSCRIPTA MATH. (1986) 212-218.

[13] BRACHO, J., RECILLAS, S., LA APLICACION PRYM-CANONICA DE UNA CURVA ALGEBRAICA, AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1981) 105-127.

[14] BRACHO, J., MONTEJANO, L., THE COMBINATORIES OF COLORED TRIANGULATIONS OF MANIFOLDS, GEOM. DEDICATA (1986).

[15] BRAVO, A., ACERCA DE UN RESULTADO DE ZAHORSKY SOBRE DIFERENCIABILID DE... AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1978) 1-6.

[16] CARDENAS, H., VAZQUEZ, R., MODULOS PROYECTIVOS DE TIPO FINITO SOBRE ANILLOS CONMUTATIVOS, AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1962) 65-82.

[17] CLAPP, M., TEORIA DE FORMA PARAMETRIZADA, MEM. SEMINARIO ESPECIAL DE TOPOLOGIA (1982) 85-99.

[18] CLAPP, M., DUALITY AND TRANSFER FOR PARAMETRIZED SPECTRA, ARCH. MATH. (1981) 462-472.

[19] CLAPP, M., DUALIDAD Y TRANSFERENCIA PARA ESPECTROS PARAMETRIZADOS, MEM. SEMINARIO ESPECIAL DE TOPOLOGIA (1981) 3-19.

[20] CLAPP, M., MONTEJANO, L., SOBRE LA RELACION DE LA CATEGORIA FUERTE CON LA CATEGORIA DE... APORTACIONES MAT. (1986) 154-167.

[21] CLAPP, M., MONTEJANO, L., PARAMETRIZED SHAPE THEORY, GLAS. MAT. SER. III, (1985) 209-235.

[22] CLAPP, M., MONTEJANO, L., LUSTERNIK-SCHNIRELMANN CATEGORY AND MINIMAL COVERINGS WITH... MANUSCRIPTA MATH.

[23] CLAPP, M., PUPPE, D., IMPROVING CATEGORICAL COVERINGS OF SPACES, LECTURE NOTES IN MATH.

[24] CLAPP, M., PUPPE, D., THE HOMOTOPY CATEGORY OF PARAMETRIZED SPECTRA, MANUSCRIPTA MATH. (1984) 219-247.

[25] CLAPP, M., PUPPE, D., IN VARIANTS OF THE LUSTERNIK-SCHNIRELMANN TYPE AND THE TOPOLOGY OF... TRANS.AMER. MATH. SOC. (1986) 603-620.

[26] CLAPP, M., PUPPE, D., THE GENERALIZED LUSTERNIK-SCHNIRELMANN CATEGORY OF A PRODUCT SPACE, (1986).

[27] GARCIA MAYNEZ, A., A CHARACTERIZATION OF T-THREE SPACES OF COUNTABLE TYPE, TOPOLOGY PROC. (1985) 151-158.

[28] GARCIA MAYNEZ, A., DELTA-COMPLETENESS AND DELTA-NORMALITY, TOPOLOGY PROC. (1981) 345-349.

[29] GARCIA MAYNEZ, A., GENERALIZATIONS OF THE CONCEPTS OF CLOSED FUNCTION AND C-EMBEDDED SET, AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1984) 13-35.

[30] GARCIA MAYNEZ, A., ILLANES, A., A SURVEY ON UNICOHERENCE AND RELATED PROPERTIES, TOPOLOGY PROC.

[31] GOMEZ, J.C., GRAPHS OF TANGLS, TRANS. AMER. MATH. SOC. (1984) 817-830.

[32] GOMEZ, J.C., TOTALLY KNOTTED KNOTS ARE PRIME, MATH. PROC. CAMBRIDGE PHILOS. SOC. (1982) 467-472.

[33] GONZALEZ ACUÑA, F., PROBLEMAS DE TOPOLOGIA TRIDIMENSIONAL, NOTICES AMER. MATH. SOC. (1976).

[34] GONZALEZ ACUÑA, F., DEHN'S CONSTRUCTION ON KNOTS, BOL. SOC. MAT. MEXICANA (1970).

[35] GONZALEZ ACUÑA, F., ON HOMOLOGY SPHERES, TESIS DOCTORAL, (1969).

[36] GONZALEZ ACUÑA, F., INDEPENDENCIA DE LA METRICA EN LA C(0)TOPOLOGICA FINA DE UN ESPACIO... AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1963) 29-35.

[37] GONZALEZ ACUÑA, F., SOBRE UN ARTICULO DE EILENBERG Y MOORE, AN.INST. MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1972) 29-38.

[38] GONZALEZ ACUÑA, F., SOBRE UN ARTICULO DE J. SIMON, AN. INST. MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1971) 43-54.

[39] GONZALEZ ACUÑA, F., INMERSION EN VARIEDADES DIFERENCIALES EN ESPACIOS EUCLIDIANO, TESIS DE LICENCIATURA, (1964).

[40] GONZALEZ ACUÑA, F., PROBLEMAS AJEDRECISTICOS EN TEORIA DE NUDOS, REV. MEXICANA (1971).

[41] GONZALEZ ACUÑA, F., ABREU, J.L., ON THE CONTINUITY AND DIFFERENTIABILITY OF FUNCTIONS ALONG REGULAR... EXPOSITION. MATH. (1985) 81-89.

[42] GONZALEZ ACUÑA, F., BOILEAU, M., MONTESINOS, J.M., SURGERY ON DOUBLE KNOTS AND SYMMETRIES. MATH. SCI. (1985).

[43] GONZALEZ ACUÑA, F., MONTESINOS, J.M., QUASIASPHERICAL KNOTS WITH INFINITELY MANY ENDS, COMMENT. MATH. HELV. (1983) 257-263.

[44] GONZALEZ ACUÑA, F., MONTESINOS, J.M., EMBEEDDING KNOTS IN TRIVIAL KNOTS, BULL. LONDON MATH. SOC. (1982) 238-240.

[45] GONZALEZ ACUÑA, F., NEYMET, S., UNA GENERALIZACION DE LA NOCION DE DESPLIEGUE DE FOX, ACTUALITES MATHEMATIQUES GMEL GAUTHIER (1982) 293-296.

[46] GONZALEZ ACUÑA, F., SHORT, H., KNOT SURGERY AND PRIMENESS, MATH. PROC. CAMBRIDGE PHILOS. SOC. (1986) 89-102.

[47] GONZALEZ ACUÑA, F., WHITTEN, W., THE EMBEDDINGS OF KNOT GROUPS IN KNOT GROUPS, PROC. GEORGIA CONFERENCE (1985).

[48] GONZALEZ ACUÑA, F., TOPOLOGIA EN ESPACIOS DE FUNCIONES, SOC. MAT. MEXICANA (1963).

[49] GONZALEZ ACUÑA, F., HOMOMORPHS OF KNOT GROUPS, MATH. ANN. (1975) 373.

[50] GONZALEZ ACUÑA, F., MONTESINOS, J., ENDS OF KNOT GROUPS, MATH. ANN. (1978) 91-96.

[51] GONZALEZ ACUÑA, F., MONTESINOS, J., NON-AMPHICHERIAL CODIMENSION 2 KNOTS, CANAD. J. MATH. (1980) 185-194.

[52] ILLANES, A., HEREDITARY MULTICOHERENCE DEGREE AND MULTICOHERENCE DEGREE OF... GLAS. MAT. SER. III (POR APARECER).

[53] ILLANES, A., A CONTINUUM X WHICH IS A RETRACT OF C(X) BUT NOT OF 2 TO THE X, PROC. AMER. MATH. SOC. (1987) 199-200.

[54] ILLANES, A., ARCWISE DISCONNECTING SUBSETS OF HYPERSPACES, HOUSTON J. MATH.

[55] ILLANES, A., MULTICOHERENCE AND PRODUCTS, TOPOLOGY PROC. (1985) 83-94.

[56] ILLANES, A., TWO EXAMPLES CONCERNING HYPERSPACE RETRACTIONS, TOPOLOGY APPL.

[57] ILLANES, A., MULTICOHERENCE OF SYMMETRIC PRODUCTS, AN. INST. MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1985) 11-24.

[58] ILLANES, A., MULTICOHERENCE OF SPACES OF THE FORM X/M, PROC. AMER. MATH. SOC.

[59] ILLANES, A., MONOTONE AND OPEN WHITNEY MAPS, PROC. AMER. MATH. SOC. (1986) 516-518.

[60] ILLANES, A., T CELLS AND CUBES IN HYPERSPACES, FUND. MATH.

[61] ILLANES, A., MULTICOHERENCE OF FINITE QUOTIENTS AND ONE-POINT COMPACTIFICATIONS, TOPOLOGY APPL.

[62] ILLANES, A., IRREDUCIBLE WHITNEY LEVELS WITH RESPECT TO FINITE AND COUNTABLE SUBSET, AN. INST. MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1986) 59-64.

[63] LARA, M., LOPEZ DE MEDRANO, S., SOBRE EL PROBLEMA INVERSO DEL CALCULO DE VARIACIONES, MEM. SYMPOSIUM MEXICO-U.S.A. EC. DIF.

[64] LOPEZ DE MEDRANO, S., TOPOLOGICAL ASPECTS OF MATRIX PROBLEMS, LECTURE NOTES IN MATH. (1982).

[65] LOPEZ DE MEDRANO, S., CLASIFICACION DE SINGULARIDADES DE ORDEN 3, MEM. SEMINARIO ESPECIAL DE TOPOLOGIA (1982).

[66] LOPEZ DE MEDRANO, S., SOBRE LA VARIEDAD DE HOJAS DE SIEGEL, MEM. SEMINARIO ESPECIAL DE TOPOLOGIA (1984).

[67] LOPEZ DE MEDRANO, S., NUDOS INVARIANTES BAJO INVOLUCIONES I, AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1968) 81-90.

[68] LOPEZ DE MEDRANO, S., SOBRE ALGUNAS SINGULARIDADES SUMAMENTE INESTABLES, AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO.

[69] LOPEZ DE MEDRANO, S., INVARIANT KNOTS AND SURGERY IN CODIMENSION 2, (1971) 99-112.

[70] LOPEZ DE MEDRANO, S., INVOLUTIONS ON MANIFOLDS, SPRINGER VERLAG (1971).

[71] LOPEZ DE MEDRANO, S., FORMA CUADRATICAS SOBRE Z(4) Y UN RESULTADO COMBINATORIO, BOL. SOC. MAT. MEXICANA (1969) 60-64.

[72] LOPEZ DE MEDRANO, S., COBORDISM OF DIFFEORMORPHISMS OF (K-1)-CONNECTED 2K-MANIFOLDS, (1972) 217-227.

[73]. LOPEZ DE MEDRANO, S., SOME RESULTS ON INVOLUTIONS HOMOTOPY SPHERES, (1968) 167-174.

[74] LOPEZ DE MEDRANO, S., RELACIONES ENTRE CLASES CARACTERISTICAS Y OPERACIONES COHOMOLOGICAS, AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1965) 13-20.

[75] LOPEZ DE MEDRANO, S., TEOREMAS DE HUREWICZY WHITEHEAD, TESIS PROFESIONAL, (1964).

[76] MONTEJANO, L., A QUICK PROOF OF SINGHOF'S CAT(M X S-ONE) = CAT(M) + 1 THEOREM, MANUSCRIPTA MATH. (1984) 49-52.

[77] MONTEJANO, L., BETA-HOMOTOPY EQUIVALENCES HAVE ALPHA-CROSS SECTIONS, MEM. AMER. MATH. SOC. (1983) 1-37.

[78] MONTEJANO, L., FLAT HILBERT CUBE MANIFOLD PAIRS, PACIFIC J. MATH. (1984) 407-425.

[79] MONTEJANO, L., LOCALLY FLAT EMBEDDINGS OF CONTRACTIBLE HILBERT CUBE MANIFOLDS ARE... AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1981) 163-173.

[80] MONTEJANO, L., LUSTERNIK-SCHNIRELMAN CATEGORY; A GEOMETRY APPROACH, GEOMETRIC AND ALGEBRAIC TOPOLOGY (1986) 119-131.

[81] MONTEJANO, L., BETA-HOMOTOPY EQUIVALENCES, CONTEMP. MATH. (1982) 257-259.

[82] MONTEJANO, L., VARIEDADES DE DIMENSION INFINITA, MEM. SEMINARIO ESPECIAL DE TOPOLOGIA (1981) 121-132.

[83] MONTEJANO, L., CATEGORICAL AND CONTRACTIBLE COVERINGS OF POLYHEDRA, TRANS. AMER. MATH. SOC.

[84] MONTEJANO, L., THE HYPERSPACE OF COMPACT CONVEX SUBSETS OF AN OPEN SUBSET OF... AN.INST.MAT. UNIV. NAC.
AUTONOMA MEXICO (1986).

[85] MONTEJANO, L., CONVEXITY IN THE HYPERSPACE OF COMPACT CONVEX SETS, GEOM. DEDICATA.

[86] MONTEJANO, L., LUSTERNIK-SCHNIRELMANN CATEGORY AND HILBERT CUBE MANIFOLDS, TOPOLOGY APPL.

[87] MONTEJANO, L., RUSHING, T.B., APPROXIMATING HOMOTOPY EQUIVALENCES BY DISK BUNDLE PROJECTIONS, GLAS. MAT. SER. III (1985).

[88] NEUMANN, V., AUTONOMOUS SUBSETS OF TOPOLOGICAL SPACES, AN. INST. MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO 19-2 (1979),177-184.

[89] NEUMANN, V., WILSON, R., THE EPIREFLECTIVE HULL OF THE CATEGORY OF T_1 DISPERSED SPACES, PROC. AMER. MATH. SOC. 80 (2) (1980), 306-310.

[90] NEUMANN, V., MEYER, P.R., WILSON, R., IS EVERY GO-TOPOLOGY A JOIN OF TWO ORDERABLE TOPOLOGIES?, PROC. AMER. MATH. SOC. 80 (2) (1980), 291-296.

[91]. NEUMANN, V., WILSON, R., SOME PROPERTIES OF ESSENTIALLY CONNECTED AND MAXIMALLY CONNECTED SPACES, PUBL. PREL. INST. MAT. UNAM 47 (1982) (POR APARECER EN HOUSTON J. MATH.)

[92] NEUMANN, V., WILSON, R., WHEN IS A LOTS DENSELY ORDERABLE?, PUBL. PREL. INST. MAT. UNAM 82 (1985).

[93] NEUMANN, V., WILSON, R., ON THE CONSTRUCTION OF BICONNECTED SETS, PUBL. PREL. INST. MAT. UNAM 99 (1985).

[94] PRIETO, C., THE LERAY-SERRE SPECTRAL SEQUENCE FOR FIBRATION PAIRS, MONOGRAFIAS INST. MAT. UNAM No. 8 (1979).

[95] PRIETO, C., LA CONJETURA DE SEGAL Y TEORIA DE PUNTO FIJO, MEM. SEMINARIO ESPECIAL DE TOPOLOGIA (1981).

[96] PRIETO, C., LA CONJETURA DE SEGAL Y COBORDISMO,MEM. SEMINARIO ESPECIAL DE TOPOLOGIA (1982) 53-69.

[97] PRIETO, C., TRANSFER AND THE SPECTRAL SEQUENCE OF A FIBRATION, TRANS. AMER. MATH. SOC. (1982) 133-142.

[98] PRIETO, C., TEORIA DE COINCIDENCIA: UN ACCESO A LA COHOMOTOPIA ESTABLE. MEM. SEMINARIO ESPECIAL DE TOPOLOGIA (1983) 187-200.

[99] PRIETO, C., TEORIAS DE COHOMOLOGIA SOBRE B K(B)-GRADUADAS Y COHOMOLOGIA... MEM. SEMINARIO ESPECIAL DE TOPOLOGIA (1984) 29-54.

[100] PRIETO, C., TEORIA FIX DE DIAGRAMAS, MEM. TALLER TOP. ALG. IV COL. CINVESTAV (1985).

[101] PRIETO, C., FIX-THEORY OF DIAGRAMS, CONTEMP. MATH.

[102] PRIETO, C., TEORIA K DE DIAGRAMAS, APORTACIONES MAT.

[103] PRIETO, C., FLUIDIFICATION OF QUIVERS AND THE TIETZE EXTENSION THEOREM ... QUAESTIONES MATH.

[104] PRIETO, C., COINCIDENCE INDEX FOR FIBER-PRESERVING MAPS. AN APPROACH TO STABLE... MANUSCRIPTA MATH. (1984) 233-249.

[105] PRIETO, C., ROTHENBERG-STEENROD SPECTRAL SEQUENCES FOR GENERAL THEORIES, TEUBNER-TEXTE ZUR MATH. (1984) 206-220.

[106] PRIETO, C., KO(B)-GRADED STABLE COHOMOTOPY OVER B AND RO(G)-GRADED... CONTEMP. MATH. (1987) 89-108.

[107] PRIETO, C., TRANSFER AND THE ROTHENBERG-STEENROD SPECTRAL SEQUENCE, BOL. SOC. MAT. MEXICANA (1987).

[108] PRIETO, C., ULRICH, H., EQUIVARIANT FIXED POINT INDEX AND FIXED POINT TRANSFER IN NONZERO DIMENSIONS (PREPUBLICACION) (1987).

[109] VAZQUEZ, R., CONEXIDAD EN DIVERSAS SUBCATEGORIAS TOPOLOGICAS, AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1982) 197-229.

[110] VAZQUEZ, R., UN ENFOQUE CORRECTO DE LA TEORIA DE LA CONEXIDAD, AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1981) 175-214.

[111] VAZQUEZ, R., SOBRE LA ESENCIALIDAD DEL CONCEPTO DE CONEXIDAD, AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1983).

[112] VAZQUEZ, R., CONGLOMERADOS SATURADOS II, AN. INST. MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1986) 25-57.

[113] VAZQUEZ, R., CONGLOMERADOS SATURADOS I, AN.INST.MAT. UNIV. NAC. AUTONOMA MEXICO (1985) 25-57.

INFORME GENERAL DESDE LA FUNDACION DEL INSTITUTO EN 1942 HASTA 1962

En junio de 1942 el señor Lic. Rodulfo Brito Foucher, Rector de la Universidad Nacional, me designó para organizar y dirigir las actividades del Instituto de Matemáticas.

Para justipreciar los trabajos de este Instituto creo conveniente dar a conocer las posibilidades que en el campo matemático ofrecía nuestro país en los años inmediatos anteriores a la fundación del Instituto.

PANORAMA MATEMATICO AL FUNDARSE EL INSTITUTO

Antes de los treinta era ostensiblemente raquítico en México el ambiente matemático. En las escuelas profesionales no había gran interés por el progreso de las ciencias exactas. Las bibliotecas eran muy deficientes, casi nulas, en obras de esta especialidad. No había cátedras superiores de físico-matemáticas, ni en la Escuela de Altos Estudios creada por don Justo Sierra en 1910. En esta escuela sí se logró dar gran impulso a la filosofía y a las letras; También se atendió en ella a las ciencias naturales con cursos y planes de estudio definidos, pero no hubo cursos superiores organizados en físico-matemáticas. Las humanidades absorbieron la atención de esta escuela, tanto que su nombre cambió poco después (1924) de Altos Estudios al de Filosofía y Letras.

Los interesados en las matemáticas sólo encontraban en su vocación como la parte más alta de estudio, las cátedras de geometría analítica y de cálculo infinitesimal de carácter muy elemental, pero que algunos distinguidos profesores de la Preparatoria, de la Escuela Nacional de Ingenieros, de la E. S. I. M. E. y del Colegio Militar, lograban darlas en forma substanciosa e interesante, sobresaliendo entre ellos la personalidad de don Sotero Prieto ¡Cuántas vocaciones y aptitudes se malograron y desperdiciaron en México con este descuido de la educación superior en las ciencias exactas!

De 1930 a 1942 tuvieron lugar varios hechos significativos en los que tuve la suerte y el honor de participar en forma activa junto con otros profesores y alumnos distinguidos, con los que se logró llamar la atención y dar impulso en nuestro país al estudio superior y a la investigación en las ciencias exactas. Estos hechos fueron los siguientes:

1) El otorgamiento de una beca (1930-1931) de una prestigiosa Institución Norteamericana, la John Simon Guggenheim Foundation, concedida a un maestro de matemáticas de México para estudios de especialización en el extranjero.

Comentario. El hecho no parece tener importancia, pero la realidad es que causó impacto en el medio científico de México por varias circunstancias: por lo rarísimo en el México de entonces (1930) de conceder y recibir becas y, ¡cosa insólita en México!, por haberse concedido la beca para el estudio en matemáticas, habiendo como había buen número de candidatos en humanidades y otras especialidades. El hecho llamó la atención, además, porque se trataba de las dos primeras becas que otorgaba la Fundación Guggenheim a latino-americanos no residentes en los EE. UU.

2) La creación en 1932 de un seminario deestudios físico-matemáticos dentro de la Academia de Ciencias Antonio Alzate, organizado por el profesor Sotero Prieto y el suscrito, a raíz de mi regreso del viaje de estudios en el Tecnológico de Massachusetts y Harvard.

Comentario. Fué una válvula de escape para algunos profesores y alumnos distinguidos interesados en las ciencias exactas. Como un oasis en laaridez del ambiente. Ahí se lograron presentar algunos trabajos de investigación original en física y en matemáticas, y desarrollar varios temas de estudio superior en ambas disciplinas. Empezaba una era nueva, prometedora, para la física y la matemática.

3) La creación en 1930 de un Departamento de Ciencias dentro del plan de Estudios de la Facultad de Filosofía y Letras, a iniciativa de su director don Antonio Caso, en donde a partir de 1932 se comenzaron a dar por primera vez en México, cátedras novedosas y de nivel superior en matemáticas y en física (análisis matemático, geometría diferencial, física teórica, mecánica racional.)

4) El logro de la primera visita a México de un matemático extranjero distinguido, realizada en 1934 por el doctor Dirk J. Struik del Tecnológico de Massachusetts, a iniciativa del suscrito y como una invitación de la Secretaria de Educación Pública, para sustentar conferencias sobre cálculo tensorial y teoría moderna de la probabilidad en los seminarios matemáticos de la Academia de Ciencias Antonio Alzate. Estas conferencias se realizaron con gran éxito, habiéndose logrado un fructífero acercamiento académico entre el profesor Struik y algunos profesores y alumnos distinguidos tanto de la Universidad Nacional como de la ESIME, dando por consecuencia la intensificación del interés por el estudio superior y la investigación en las ciencias exactas.

5) La creación en 1935, dentro de la Universidad Nacional, de una Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, de la Escuela de Graduados y, posteriormente (1939) de la actual Facultad de Ciencias, con cátedras superiores en matemáticas y en física, para otorgar títulos y grados académicos en ambas especialidades.

En 10 años, de 1932 a 1942 cuando se fundó el Instituto, había ya conquistado personalidad la físico-matemática superior en México. Estaba en formación un grupo selecto, aunque reducido, de jóvenes profesores y estudiantes distinguidos con preparación académica en nuestra Universidad, en la Escuela de Graduados y en la Facultad de Ciencias, y algunos en el extranjero.

Este grupo fué la base en la creación del Instituto de Matemáticas.

PRIMERAS ACTIVIDADES DEL INSTITUTO

El Primer Congreso Nacional de Matemáticas

Al ser designado Director del Instituto en junio de 1942, mi primera atención fué la de buscar el fortalecimiento y el ensanche del naciente ambiente para los estudios matemáticos: por una parte crear gusto e interés en una escala más amplia para los ya interesados y, por otra parte, descubrir aptitudes y valores nuevos, principalmente entre los jóvenes. Con este motivo enfoqué mis trabajos en la organización del Primer Congreso Nacional de Matemáticas.

Sin ningún patrocinio económico, y teniendo que luchar contra recelos y tibiezas por lo novedoso y atrevido del paso, logramos realizar el primer congreso nacional matemático en Saltillo, Coahuila, en noviembre de 1942, como uno de los actos conmemorativos del LXXV Aniversario de la fundación del Ateneo Fuente de ese Estado.

El Congreso tuvo excelente éxito académico. Fueron presentados como un centenar de trabajos por los delegados de diversas instituciones, oficiales y particulares, que respondieron noblemente al llamado del Instituto de Matemáticas.

Una consecuencia de este Congreso Matemático Nacional fué la creación de la SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA en junio 30 de 1943, al año de haberse creado el Instituto.

TRABAJOS DEL INSTITUTO

Ya encontrado el panorama matemático de México, con sus realidades expuestas en el Congreso Nacional de Matemáticas de noviembre de 1942, procedí a organizar el desarrollo de las actividades del Instituto en las siguientes vías:

a) Trabajos de investigación,

b) Envío de investigadores al extranjero para mejorar su preparación,

c) Invitación a matemáticos extranjeros para desarrollar seminarios de su especialidad en el Instituto de Matemáticas,

d) Formación de la Biblioteca especializada en matemáticas,

e) Cooperación en la celebración de asambleas y congresos matemáticos nacionales.

f) Organización de reuniones matemáticas en México de carácter internacional,

g) Publicación de los trabajos de investigación.

a) Trabajos de Investigación

En 1943 inicié la organización de los trabajos de investigación en tres ramas generales: matemática pura, lógica y fundamentos y matemática aplicada. Los trabajos de la primera fueron encomendados a los investigadores Alberto Barajas y Roberto Vázquez; los de la segunda a Francisco Zubieta, y los de la matemática aplicada a Carlos Graef Fernández.

El grupo de investigadores era muy corto pero excelente: juventud, capacidad, vocación e interés académico. El grupo fué ampliándose con la admisión de nuevos elementos que se iban formando en la Facultad de Ciencias y en el Instituto, por medio de cátedras superiores en la primera y seminarios en el segundo. Algunos eran enviados al extranjero por el Instituto para lograr su especialización.

En la elección de temas de trabajo se tuvo en cuenta el interés y las necesidades de la materia en nuestro país, así como la preparación, la capacidad y el interés de los investigadores.

Me es satisfactorio decir haciendo justicia a nuestro grupo matemá tico que desde los primeros trabajos de investigación hasta los más recien tes siempre han existido algunos que han merecido la atención y felicitación de otros países.

En las primeras investigaciones del Instituto tuvo gran influencia la personalidad del Profesor George D. Birkhoff, matemático de altos vuelos de la Universidad de Harvard con quien tuve el honor de relacionarme en Puebla al inaugurarse el Observatorio de Tonanzintla.

Merecen especial mención los trabajos con los que se desarrolló en 1943 y 1944 una nueva teoría de la gravitación, la Teoría de Birkhoff, que qui so Birkhoff desarrollarla en nuestro Instituto de Matemáticas al encontrarse con dos elementos altamente preparados en cálculo tensorial.

Los trabajos desarrollados en el Instituto de Matemáticas por Bir-khoff, Graef y Barajas tuvieron resonancia mundial. El Boletín Matemático que publicó dichos trabajos se agotó en un lapso corto. La Enciclopedia Bri tánica, en su Book of the Year 1945, los menciona entre los trabajos matemá ticos que más llamaron la atención en 1944.

De Polonia pidieron más detalles sobre un trabajo de investigación de Roberto Vázquez y Francisco Zubieta sobre la teoría del continuo. Varias revistas matemáticas extranjeras, entre ellas el Mathematical Reviews de la American Mathematical Society y el Zentralblatt fur Mathematik und Ihre Grenzgebiete de Alemania, han comentado y continúan comentando varios de los trabajos de investigación científica del Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional. Entre varios comentarios particulares de matemá-ticos que he recibido, el más reciente es el del Profesor Raymond H. Ro-per de Australia, con fecha 4 de mayo de 1962 , en donde habla con entusias mo sobre el 'lustre' de los matemáticos mexicanos. Entre los trabajos más recientes que han sido elogiados están los del Dr. José Adem en topología y del Dr. Samuel Barocio sobre ecuaciones diferenciales.

En los últimos años en nuestro Instituto han recibido gran impulso la topología y las ecuaciones diferenciales con la presencia del profesor Solomon Lefschetz, distinguido matemático de fama mundial que trabaja con nosotros desde 1954.

En los informes individuales de los investigadores que figuran en el expediente anexo, se enumeran los trabajos de investigación que se han elaborado en este Instituto de Matemáticas.

Personal de Investigación

En 1961 el personal de investigación del Institutode Matemáticas estaba formado como sigue:

Investigadores de Tiempo Completo

	CATEGORIA	ESPECIALIDAD
José Adem Chahin	la.*	Topología
Emilio Lluis Riera	la.	Geometría Algebraica
Alfonso Nápoles Gándara	la. (Emérito)	Geometría Diferencial
Félix Recillas Juárez	la.	Geometría Algebraica
Guillermo Torres Díaz	la.	Teoría de los Nudos
Roberto Vázquez García	la.	Topología
Humberto Cárdenas Trigos	2a.**	Topología
Rodolfo Morales Martínez	2a.	Análisis y Topología
Enrique Valle Flores	2a.	Análisis
Gonzalo Zubieta Russi	2a.**	Lógica Matemática

* Baja en 1962 por renuncia o licencia sin goce de sueldo
**Promovido en 1962 a la la. categoría (marzo de 1962).

Investigador de Carrera

	CATEGORIA	ESPECIALIDAD
Francisco Zubieta Russi	Pta.	Fundamentos de las Matemáticas

Investigadores Ordinarios

Silvia de Neymet Urbina*	Ecuaciones Diferenciales
Lomelí Cerezo Guadalupe *	Estadística y Probabilidad
Juan Morcos Salmán *	Matemática Aplicada
Remigio Valdés Gámez *	Estadística y Probabilidad

b) Envío de Investigadores al Extranjero

Un medio que ha auspiciado con éxito el Instituto de Matemáticas para promover el progreso de la investigación científica en nuestra Universidad Nacional, es el de fomentar el envío de nuestros investigadores a universidades extranjeras. A los recién titulados que se hayan distinguido mucho en los cursos de especialización y en el desarrollo de alguna investigación original de reconocido alto nivel científico, se les envía para doctorarse. A los ya doctorados y con trabajo notable y grandes aptitudes para la investigación, se les envía para continuar y ampliar su trabajo en un medio más eficiente por la riqueza de sus bibliotecas, por sus trabajos de seminario más variados y selectos y el fácil acceso con investigadores altamente especializados. Por otra parte, algunos de nuestros investigadores han sido invitados por universidades extranjeras para ir a comunicar sus trabajos de investigación, y también para desarrollar investigaciones al lado de sus especialistas.

Este movimiento ha sido posible por el patrocinio desde luego de la Universidad Nacional, conservando el sueldo del investigador, y las becas concedidas por otras instituiiones como la IFAL de México, la John Simon Guggenheim Foundation y la Rockefeller Foundation de Norte América.

Con estas finalidades han salido al extranjero:

Roberto VAZQUEZ GARCIA, que en 1943-1944 estuvo en la Universidad de Princeton, y en 1955 y 1959 estuvo en Francia, con doctorado en México en 1947.

Alberto BARAJAS CELIS, que en 1944-1945 y en 1950 estuvo en Harvard.

Remigio VALDES GAMEZ, que en 1945 estuvo en Princeton, en 1955 en Columbia y en 1960 en California.

Félix RECILLAS JUAREZ, que en 1945 estuvo en Princeton en donde se doctoró en 1948; volvió a Princeton en 1950 y 1957 y estuvo en Francia en los inviernos de 1951, 1953 y 1959.

Guillermo TORRES DIAZ, que en 1947-1950 estuvo en Princeton, en donde se doctoró en 1950; volvió a Princeton en el invierno de 1952 y estuvo en Francia en el 2º semestre de 1954 y 1959.

Humberto CARDENAS TRIGOS que en 1952 estuvo en Princeton en donde obtuvo la maestría en 1954.

Emilio LLUIS RIERA, que en 1953-1954 estuvo en Princeton, en donde se doctoró en 1954; estuvo en Francia en 1954 y 1957, y en Berkeley, Cal. en 1961.

José ADEM CHAHIN, que en 1949-1954 estuvo en la Universidad de Princeton en donde se doctoró en 1952. Estuvo nuevamente en Princeton en 1955, 1957 y 1961. Además, como invitado especial, en Niza, Francia, en 1957 y en Buenos Aires en 1959.

Otros miembros del Instituto de Matemáticas han salido de México como invitados por diversas universidades, entre otras de los Estados Unidos, de Francia, de Argentina y de Colombia.

Todos los investigadores están titulados. Once de ellos tienen grados académicos: 7 tienen el doctorado y 4 la maestría en matemáticas. Todos los investigadores de tiempo completo del Instituto tienen el grado de Doctor en Matemáticas.

c) Investigadores Extranjeros Invitados

Otro de los grandes impulsos que ha recibido la investigación matemática en México se ha debido a la presencia en el Instituto de distinguidos matemáticos extranjeros que han sido invitados por la Universidad Nacional. Parte de estas visitas se han logrado con el intercambio de la Universidad Nacional con el Departamento de Estado Norteamericano y con el Gobierno de Francia.

George Birkhoff, de Harvard University, gran amigo de nuestro Instituto, fué el primer hombre de ciencia extranjero que estuvo en el Instituto de Matemáticas (1943 a 1944). Muchos temas de investigación fueron sugeridos por él. Su influencia se hizo sentir aún algunos años después de su muerte (1945). Jean Delsarte, Rector de la Universidad de Nancy, Francia, fué el primer matemático francés que nos visitó. Godofredo García, Rector de la Universidad de San Marcos de Lima, Perú, fue el primer latinoamericano visitante de nuestro Instituto. En los siguientes años nos han seguido visitando diversos y muy distinguidos matemáticos, tanto norteamericanos como franceses y dos o tres de China y Japón.

Entre los últimos visitantes ha destacado la presencia del Dr. Solomon Lefschetz aquien se considera como otro de los buenos amigos del Instituto y que de hecho es investigador del mismo desde 1955; ha colaborado en forma activa y eficiente en la preparación de varios investigadores.

d) Formación de la Biblioteca

Una de las fuentes principales para la investigación en ciencia pura es la biblioteca especializada. Son sorprendentes en las universidades extranjeras las bibliotecas de especialización en las diferentes disciplinas científicas. A este respecto lamentablemente no existían en nuestro país bibliotecas decorosas en la especialidad físico-matemática. Algunos profesores mexicanos y escasas instituciones académicas como la Sociedad Antonio Alzate, tenían algunas obras de la matemática clásica, pero era casi nula la existencia en libros de matemática moderna, es decir, de la matemática creada en el siglo pasado y particularmente de nuestra centuria. En el segundo tercio de este siglo un reducido número de profesores comenzaron a aumentar su biblioteca con libros de matemáticas y de física moderna, pero esto era muy lento y raquítico dada la notoria pobreza en los sueldos de los profesores tanto en la Universidad como en las instituciones docentes oficiales, y el poco interés que había en México por el desarrollo de las ciencias exactas.

Por esto, una de las preocupaciones principales de esta Dirección fue la de iniciar la formación en la Universidad Nacional de una biblioteca especializada en matemáticas en el Instituto de Matemáticas, que respondiera en la medida de nuestras posibilidades a la gran necesidad del conocimiento del desarrollo y de los descubrimientos recientes realizados en las ciencias exactas. En todas las Universidades de prestigio de los Estados Unidos, y desde luego del Viejo Continente, ha habido mucho interés en formar bibliotecas de especialización, comprendiendo las mejores colecciones de libros de alto nivel no precisamente de texto, y de revistas en las que se exponen los temas de investigación actual.

En 1942, al fundarse el Instituto de Matemáticas existían unos cuantos libros de la especialidad que figuraban en la Facultad de Filosofía y Letras.

Reuniendo estos libros con un donativo valioso que hicieron algunas Universidades norteamericanas a solicitud de dos distinguidos profesores, el matemático G. D. Birkhoff y el astrónomo Harlow Shapley, ambos de Harvard

University, quienes simpatizaron mucho con la creación del Instituto de Matemáticas en la Universidad Nacional.

Además se adquirió por donativo la biblioteca del joven matemático Antonio Suárez y por compra la biblioteca del maestro Sotero Prieto, continuando la adquisición de obras y revistas para este Instituto de Matemáticas con fondos de la Universidad Nacional y de un donativo de la Fundación Rockefeller otorgado en 1955 con dicha finalidad.

La existencia actual en la biblioteca del Instituto de Matemáticas es la siguiente:

Libros	(volúmenes)	5,700
Revistas	(volúmenes)	2,300

Faltan por adquirir colecciones completas de publicaciones periódicas matemáticas, obras completas clásicas de matemáticos distinguidos, y libros sobre los estudios de investigación reciente que se está desarrollando en la disciplina matemática.

e) Cooperación en los Congresos Matemáticos Nacionales

Si el interés por la matemática era raquítico en la Capital de la República, se explica que está deficiencia tuviera mucho mayores proporciones en la provincia.

Teniendo la seguridad de que la celebración de asambleas y congresos impulsa el estudio y a la investigación científica, y necesitándose impulsar el estudio y la investigación matemática en México, el Instituto de Matemáticas cooperó con la Sociedad Matemática Mexicana en la celebración de alrededor de 18 asambleas y congresos matemáticos en diferentes regiones del país.

La cooperación consistió en el trabajo de organización llevado a cabo por la Dirección del Instituto, en el trabajo de los investigadores del Instituto de desarrollar investigaciones originales para ser presentadas en dichos congresos, y en tomar a su cargo casi todas las conferencias de divulgación sustentadas en los mismos.

Esas reuniones animaron a los profesores de ciencias exactas así como a varios profesionistas y estudiantes distinguidos tanto del Distrito Federal como de la provincia. Se logró despertar interés en las instituciones de carácter docente por el estudio superior de las matemáticas y se logró que en la provincia se establecieran y sigan estableciéndose, escuelas de ciencias físico-matemáticas dentro de las universidades respectivas. Así se logró en Monterrey, en Guadalajara, en Mérida, en Campeche, en Puebla y siendo la más reciente la de Jalapa, Veracruz.

f) Organización de Reuniones Matemáticas de Carácter Internacional

Con la presencia del Dr. Solomon Lefschetz en México y la especialización de varios investigadores que se enviaron con ese fin a los Estados Unidos, se inició un progreso notable y se hizo posible la realización de dos importantes reuniones matemáticas de carácter internacional.

El Instituto de Matemáticas organizó y celebró en México la primera reunión internacional de Matemáticas, un Symposium Internacional de Topología Algebraica que se desarrolló en la Ciudad Universitaria en agosto de 1956, con la asistencia de los más distinguidos topólogos del mundo. Se presentaron notables trabajos de investigación original, los cuales fueron publicados en 1958 por la Universidad Nacional, con la cooperación de la UNESCO, con una excelente presentación tipográfica.

El Instituto de Matemáticas organizó además, una segunda reunión de alcance mundial, el Symposium Internacional de Ecuaciones Diferenciales, que se desarrolló con notable éxito en este mismo Instituto de Matemáticas en septiembre de 1959.

También la Universidad publicó una Memoria sobre este Symposium Internacional con la misma presentación tipográfica de la anterior, compartiendo en esta ocasión el nombre de editor con la Sociedad Matemática Mexicana.

g) Publicación de los Trabajos de Investigación

El Instituto de Matemáticas no tiene publicación especial. Los trabajos de investigación se han publicado desde un principio en el Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. Debido al hecho de que el Director del Instituto era también Presidente de la Sociedad Matemática Mexicana, se resolvió que en el Boletín de ésta se publicaran los trabajos de investigación del Instituto. Sin embargo, al reorganizarse en 1956 el Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana se le ha dado nueva estructura y mayor alcance, por lo que dejó de ser publicación del Instituto.

Varios trabajos del Instituto de Matemáticas se han publicado en revistas extranjeras. Actualmente se están haciendo los arreglos necesarios para que a partir de este año se publiquen los Anales del Instituto de Matemáticas en donde se comuniquen los trabajos de investigación de este Instituto.

México, D.F., junio de 1962.

El Director

DR. ALFONSO NAPOLES GANDARA

Celebración del 45 aniversario del Instituto de Matemáticas 1942-1987, se terminó de imprimir el 30 de octubre de 1987. Su tiraje consta de 500 ejemplares.