CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
SEMESTRE 2026 - 1
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS PARA EL DESARROLLO
ENES JURIQUILLA
TAREA 8

PROFESORES: ULISES VELASCO GARCÍA & GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Lunes, 20 de octubre, 2025.

Antes de las 8:10 AM 100%

Después de las 8:10 AM y hasta las 11:59 PM: 80%

No se aceptarán tareas después de la fecha límite.

Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles.

Problema 1: Halle los siguientes límites en función del número

$$\alpha = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

.

(1) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$.

(2) $\lim_{x\to\infty} x \sin \frac{1}{x}$.

Problema 2:

Halle los siguientes límites cuando estos existan.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4x-7}{7x^2-x+1}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x(1+\sin^2 x)$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin^2 x$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2 \sin \frac{1}{x}$.

e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+2x}-x)$.

f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$.

g) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{|x|}}{x}$.

Problema 3: (a) Suponga que f es una función que satisface $|f(x)| \le |x|$ para todo x. Demuestre que f es continua en 0. (Observe que $f(0)$ debe ser igual a 0.)

(b) Dé un ejemplo de una función f de este tipo que no sea continua en ningún $a \neq 0$.

(c) Suponga que g es continua en 0, que $g(0) = 0$ y que $|f(x)| \le |g(x)|$. Demuestre que f es continua en 0.

Problema 4: Suponga que f satisface

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{para todo } x, y,$$

y que f es continua en 0. Demuestre que f es continua en a para todo a.

Problema 5: (a) Demuestre que si f es continua en ℓ y

$$\lim_{x\to a} g(x) = \ell,$$

entonces

$$\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f(\ell).$$

(Sugerencia: se puede hacer partiendo de las definiciones, pero es más fácil considerar la función

$$G(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq a, \\ \ell, & x = a, \end{cases}$$

y usar que G es continua en a.)

(b) Demuestre que si no se supone la continuidad de f en b, entonces, en general, no se cumple que

$$\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f\big(\lim_{x\to a} g(x)\big).$$

Indicación: Construya f de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq \ell, \\ 1, & x = \ell. \end{cases}$$

Problema 6: Suponga que f es continua en $[a, b]$ y que $f(x)$ es siempre racional. ¿Qué puede decirse acerca de f?

Problema 7: ¿Cuántas funciones continuas f existen que satisfagan

$$(f(x))^2 = x^2 \quad \text{para todo } x?$$

Problema 8:

(a) Suponga que f es continua en (a, b) y que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty.$$

Demuestre que f posee un valor mínimo en (a, b).

(b) Demuestre el mismo resultado en el caso de que $a = -\infty$ y/o $b = +\infty$.