CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
SEMESTRE 2026 - 1
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS PARA EL DESARROLLO
ENES JURIQUILLA
TAREA 7

PROFESORES: ULISES VELASCO GARCÍA & GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Lunes, 13 de octubre, 2025.
Antes de las 8:10 AM 100%
Después de las 8:10 AM y hasta las 11:59 PM: 80%
No se aceptarán tareas después de la fecha límite.
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles.

Problema 1:

(a) Demuestre que si
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=l$$
y $b\neq 0$, entonces
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(bx)}{x}=bl.$$
Indicación: Escriba
$$\frac{f(bx)}{x}=b\left[\frac{f(bx)}{bx}\right].$$

(b) ¿Qué ocurre si $b=0$?

(c) El apartado (a) nos permite hallar
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}$$
en función de
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.$$
Halle este límite mediante otro procedimiento.

Problema 2: Calcule los siguientes límites expresando el resultado en función del número
$$\alpha=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.$$

(i)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$$

(ii)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$$

(iii)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x}$$

(iv)
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

(v)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x + 2x}{x + x^2}$$
(vi)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2}$$
(vii)
$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$$
(viii)
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$
(ix)
$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$$
(x)
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(3+\sin x)}{(x+\sin x)^2}$$
(xi)
$$\lim_{x\to 1} (x^2-1)^3 \sin\left(\frac{1}{x-1}\right)^3.$$

Problema 3:

(a) Demuestre que si
$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$
entonces
$$\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|.$$

(b) Demuestre que si
$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = m,$$
entonces
$$\lim_{x\to a} \max\{f,g\}(x) = \max\{\ell, m\},$$
y de forma análoga para el mínimo:
$$\lim_{x\to a} \min\{f,g\}(x) = \min\{\ell, m\}.$$

Problema 4: Considere una función f que posee la siguiente propiedad:

si g es cualquier función para la cual no existe $\lim_{x\to 0} g(x)$, entonces tampoco existe $\lim_{x\to 0}\big(f(x)+g(x)\big)$. Demuestre que esto ocurre si y sólo si existe el límite $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Indicación: En realidad el problema es muy fácil de resolver: si no existiera el $\lim_{x\to 0} f(x)$, se obtiene una contradicción inmediata eligiendo una función g adecuada.

Problema 5: Demuestre que
$$\lim_{x\to 0^+} f\Big(\frac{1}{x}\Big) = \lim_{x\to +\infty} f(x).$$