

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
SEMESTRE 2026 - 1
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS PARA EL DESARROLLO
ENES JURIQUILLA
TAREA 6

PROFESORES: ULISES VELASCO GARCÍA & GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Lunes, 6 de octubre, 2025.

Antes de las 8:10 AM 100%

Después de las 8:10 AM y hasta las 11:59 PM: 80%

No se aceptarán tareas después de la fecha límite.

Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles.

Problema 1: Suponga que las funciones f y g poseen la siguiente propiedad: para todo $\varepsilon > 0$ y todo x ,

$$\text{si } 0 < |x - 2| < \sin^2 \left(\frac{\epsilon^2}{2} \right) + \epsilon, \quad \text{entonces } |f(x) - 2| < \varepsilon,$$

$$\text{si } 0 < |x - 2| < \epsilon^2, \quad \text{entonces } |g(x) - 4| < \varepsilon.$$

Para cada $\varepsilon > 0$ halle un $\delta > 0$ tal que, para todo x :

(i) Si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces

$$|f(x) + g(x) - 6| < \varepsilon.$$

(ii) Si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces

$$|f(x)g(x) - 8| < \varepsilon.$$

(iii) Si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{4} \right| < \varepsilon.$$

(iv) Si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon.$$

Problema 2: Dé un ejemplo de una función f para la cual sea falsa la afirmación:

$$\text{Si } |f(x) - 1| < \varepsilon \quad \text{cuando } 0 < |x - a| < \delta,$$

entonces

$$|f(x) - 1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{cuando } 0 < |x - a| < \frac{\delta}{2}.$$

Problema 3:

(a) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ no existen, ¿puede existir

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) ? \quad \text{¿Y} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) ?$$

(b) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe y también existe $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$, ¿debe existir necesariamente $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$?

- (c) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ no existe, ¿puede existir

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) ?$$

- (d) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe y también existe $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$, ¿se deduce necesariamente que exista $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$?

Problema 4:

- (a) Suponga que $f(x) < g(x)$ para todo x . Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

siempre que ambos límites existan.

- (b) Si $f(x) \leq g(x)$ para todo x , ¿se deduce necesariamente que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x) ?$$

Problema 5: Suponga que $f(x) < g(x) < h(x)$ para todo x en un entorno de a (excepto quizá en a) y que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x).$$

Demuestre que existe el límite $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ y que

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x).$$

(¡Haga un dibujo!)