CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
SEMESTRE 2026 - 1
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS PARA EL DESARROLLO
ENES JURIQUILLA
TAREA 3

PROFESORES: ULISES VELASCO GARCÍA & GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Viernes, 12 de septiembre, 2025.
Antes de las 10:10 AM 100%
Después de las 10:10 AM y hasta las 11:59 PM: 80%
No se aceptarán tareas después de la fecha límite.
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles.

Problema 1: Sean $S(x) = x^2$, $P(x) = 2^x$ y $s(x) = \sin x$. Halle los siguientes valores. En cada caso, la respuesta ha de ser un número:

(1) $(S \circ P)(y)$.
(2) $(S \circ s)(y)$
(3) $(S \circ P \circ s)(t) + (s \circ P)(t)$.
(4) $s(t^3)$.

Problema 2:

Una función f es *par* si $f(x) = f(-x)$ para todo x y *impar* si $f(-x) = -f(x)$ para todo x. Por ejemplo, f es par si $f(x) = x^2$, $f(x) = |x|$ o $f(x) = \cos x$, mientras que f es impar si $f(x) = x$ o $f(x) = \sin x$.

(a) Determine si $f + g$ es par, impar o ninguna de las dos, en los cuatro casos que se obtienen al elegir f par o impar y g par o impar. (Las respuestas se pueden disponer de manera conveniente en una tabla 2×2.)
(b) Plantee la misma cuestión para $f \cdot g$.
(c) Plantee la misma cuestión para $f \circ g$.
(d) Demuestre que toda función f puede escribirse de la forma $f(x) = G(|x|)$ para infinitas funciones G.

Problema 3:

(1) Demuestre que cualquier función f con dominio $\mathbb{R}$ se puede escribir como

$$f = E + O,$$

siendo E una función par y O una función impar.

(2) Demuestre que esta descomposición es única.

Problema 4:

Suponga que f satisface

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{para todo } x, y.$$

(1) Demuestre que

$$f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n).$$

(2) Demuestre que existe un número c tal que

$$f(x) = cx$$

para todo número racional x. (En este punto no intentamos decir nada acerca de $f(x)$ para x irracional). *Indicación:* Intente primero imaginar cuál debe ser el número c. Luego demuestre que $f(x) = cx$, primero cuando x es un número natural, después cuando x es un entero, y finalmente cuando x es un número racional.

Problema 5: Si $f(x) = 0$ para todo x, entonces f satisface

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{para todo } x, y,$$

y también

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \quad \text{para todo } x, y.$$

Suponga ahora que f satisface estas dos propiedades, pero que $f(x)$ no es siempre 0. Demuestre que $f(x) = x$ para todo x, de la manera siguiente:

(1) Demuestre que $f(1) = 1$.
(2) Demuestre que $f(x) = x$ si x es racional.
(3) Demuestre que $f(x) > 0$ si $x > 0$. (Esta parte es más complicada, pero si el lector ha prestado atención a las observaciones filosóficas que acompañan a los problemas de los dos últimos capítulos, sabrá cómo resolverlo.)
(4) Demuestre que $f(x) > f(y)$ si $x > y$.
(5) Demuestre que $f(x) = x$ para todo x. *Indicación:* Utilice el hecho de que entre dos números reales cualesquiera existe un número racional.

Problema 6:

a) Demuestre que no existen funciones f y g que satisfagan alguna de las siguientes propiedades:
   (a) $f(x) + g(y) = xy$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
   (b) $f(x) \cdot g(y) = x + y$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

   Indicación: Intente obtener información sobre f o g eligiendo valores particulares de x e y.
b) Encuentre funciones f y g tales que

$$f(x + y) = g(xy) \qquad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$