CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
SEMESTRE 2026 - 1
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS PARA EL DESARROLLO
ENES JURIQUILLA
TAREA 2

PROFESORES: ULISES VELASCO GARCÍA & GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Viernes, 5 de septiembre, 2025.
Antes de las 10:10 AM 100%
Después de las 10:10 AM y hasta las 11:59 PM: 80%
No se aceptarán tareas después de la fecha límite.
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles.

Problema 1:
Demuestre por inducción las siguientes fórmulas.

(i)
$$1^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(ii)
$$1^3 + \ldots + n^3 = (1 + \ldots n)^2.$$

Problema 2: Si $0 \leq k \leq n$, se define el "coeficiente binomial" $\binom{n}{k}$ mediante

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}, \text{ si } k \neq 0, n.$$

El teorema del binomio (ver problema 3 de la página 27) nos dice que

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j.$$

Demuestre que

(a)
$$\sum_{k=0}^{\ell} \binom{n}{k} \binom{m}{\ell - k} = \binom{n+m}{\ell}$$

Sugerencia: Aplique el teorema del binomio a $(1+x)^n(1+x)^m$.

(b) Demuestre que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Problema 3:

(a) Si a es racional y b es irracional, ¿es $a+b$ necesariamente irracional? ¿Qué ocurre si a y b son ambos irracionales?
(b) Si a es racional y b es irracional, ¿es ab necesariamente irracional? (¡Cuidado!)
(c) ¿Existe un número a tal que a^2 sea irracional pero a^4 racional?
(d) ¿Existen dos números irracionales cuya suma y su producto sean ambos racionales?

Problema 4: Demuestre que si x satisface

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

para algunos enteros $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, entonces x es irracional a no ser que x sea entero.

Problema 5:

La sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, \ldots$ se define como sigue:

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{para } n \geq 3.$$

Esta sucesión, cuyos primeros términos son

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots,$$

fue descubierta por Fibonacci (1175–1250, aprox.), en relación con un problema de conejos. Fibonacci supuso que una pareja de conejos criaba una nueva pareja cada mes y que después de dos meses cada nueva pareja se comportaba del mismo modo. El número a_n de parejas en el n-ésimo mes satisface $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, puesto que nace una pareja por cada pareja existente el mes anterior, y además cada pareja nacida hace dos meses produce ahora una nueva pareja.

Es verdaderamente asombroso el número de resultados interesantes relacionados con esta sucesión; existe incluso una Asociación Fibonacci que publica una revista, *The Fibonacci Quarterly*. Demuestre que

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Problema 6:

Sea

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

¿Qué es?

(i) $f(f(x))$ (¿Para qué x tiene sentido?)

(ii) $f\left(\frac{1}{x}\right)$

(iii) $f(cx)$

(iv) $f(x+y)$

(v) $f(x) + f(y)$

(vi) ¿Para qué números c existe un número x tal que $f(cx) = f(x)$?
Sugerencia: Hay muchos más de los que podría parecer a primera vista.

(vii) ¿Para qué números c se cumple que $f(cx) = f(x)$ para dos números x distintos?

Problema 7: Sea $g(x) = x^2$, y sea

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x\text{racional} \\ 1, & x \text{ irracional.} \end{cases}$$

(i) ¿Para cuáles y es $h(y) < y$?

(ii) ¿Para cuáles y es $h(y) < g(y)$?

(iii) ¿Qué es $g(h(z)) - h(z)$?

(iv) ¿Para cuáles w es $g(w) < w$?

(v) ¿Para cuáles e es $g(g(e)) = g(e)$?