ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
SEMESTRE 2025 - 2
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS PARA EL DESARROLLO
ENES JURIQUILLA
TAREA 7

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Lunes, 7 de abril, 2025.
Antes de las 9:10 AM 100%
Después de las 9:10 AM y hasta las 12 AM 80%
No se aceptarán tareas después de la fecha límite.
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles.

Problema 1: En cada uno de los siguientes problemas, use el método de Euler para aproximar valores de la solución de los problemas de valores iniciales a tiempos $t = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$, y 3:

(a) Con $h = 0.1$.
(b) Con $h = 0.01$.

1) $y' = 5 - 3\sqrt{y}$, $y(0) = 2$.
2) $y' = y(3 - ty)$, $y(0) = 0.5$.
3) $y' = (4 - ty)/(1 + y^2)$, $y(0) = -2$.

Problema 2: Se puede demostrar que, bajo condiciones adecuadas sobre f, la aproximación numérica generada por el método de Euler para el problema de valor inicial

$$y' = f(t, y)\ ,\ y(t_o) = y_0$$

converge a la solución exacta a medida que el tamaño del paso h disminuye. Esto se ilustra con el siguiente ejemplo. Considere el problema de valor inicial:

$$y' = 1 - t + y\ ,\ y(t_o) = y_0$$

a) Muestra que la solución es $y = \phi(t) = (y_0 - t_0)e^{t-t_0} + t$.
b) Usando la fórmula de Euler, muestra que

$$y_k = (1 + h)y_{k-1} + h - ht_{k-1}, k = 1, 2, \ldots .$$

c) Notemos que $y_1 = (1 + h)(y_0 - t_0) + t_1$, muestra por inducción que

$$y_n = (1 + h)^n(y_0 - t_0) + t_n$$

para cada entero positivo n.

d) Considera un punto fijo $t > t_0$ y para un n dado, elige $h = (t - t_0)/n$. Entonces $t_n = t$ para cada n. Notemos también que $h \to 0$ cuando $n \to \infty$. Sustitiyendo h en la ecuación del inciso anterior, y tomando $n \to \infty$, mostremos que $y_n \to \phi(t)$ cuando $n \to \infty$.

Sugerencia: $\lim_{n\to\infty}(1 + a/n)^n = e^a$.

Problema 3: En cada uno de los siguientes problemas, sea $\phi_0(t) = 0$ y usa el método de aproximaciones sucesivas para aproximar la solución del problema de valor inicial.

(a) Calcula $\phi_1(t), \dots, \phi_4(t)$, o (si es necesario), usa aproximaciones de Taylor para esas iteraciones. Mantén términos hasta el orden 6.

(b) Grafica las funciones que encontraste en la parte (a) y observa si parece que está convergiendo.

1) $y' = -\sin y + 1$, $y(0) = 0$.
2) $y' = (3t^2 + 4t + 2)/(2(y-1))$, $y(0) = 0$.

Problema 4: Este problema es en relación con la prueba del teorema de existencia y unicidad. Considera la sucesión $\phi_n(x) = 2nxe^{-nx^2}$, $0 \leq x \leq 1$.

a) Muestra que $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = 0$ para $0 \leq x \leq 1$; entonces

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} \phi_n(x)dx = 0.$$

b) Muestra que

$$\int_0^1 2nxe^{-nx^2} dx = 1 - e^{-n};$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \phi_n(x)dx = 1.$$

Entonces, en este ejemplo,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n(x)dx \neq \int_a^b \lim_{n\to\infty} \phi_n(x)dx,$$

aún cuando $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x)$ existe y es continua.