ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
SEMESTRE 2025 - 2
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS PARA EL DESARROLLO
ENES JURIQUILLA
TAREA 5

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Lunes, 24 de marzo, 2025.
Antes de las 9:10 AM 100%
Después de las 9:10 AM y hasta las 12 AM 80%
No se aceptarán tareas después de la fecha límite.
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles.

Problema 1: Soluciones de equilibrio semiestables. A veces, una solución de equilibrio constante tiene la propiedad de que las soluciones que se encuentran en un lado de la solución de equilibrio tienden a acercarse a ella, mientras que las soluciones que caen en el otro lado se alejan de esta. En este caso se dice que la solución en equilibrio es semi-estable.

(a) Considera la ecuación
$$\frac{dy}{dt} = k(1-y)^2,$$
donde k es una constante positiva. Muestra que $y = 1$ es el único punto crítico, con la correspondiente solución de equilibrio $\phi(t) = 1$.

(b) Dibuja $f(y)$ como función de y. Muestra que y es creciente como función de t para $y < 1$ y también para $y > 1$. El campo de vectores tiene flechas apuntando hacia arriba tanto por debajo como por encima de $y = 1$. Por lo tanto, las soluciones por debajo de la solución de equilibrio tienden a acercarse a ella, y las que están por encima se alejan más. Por lo tanto, $\phi(t) = 1$ es semiestable.

(c) Resuelve la ecuación sujeta a la condición inicial $y(0) = y_o$ y confirma las conclusiones alcanzadas en la parte (b).

Problema 2: Otra ecuación que se ha utilizado para modelar el crecimiento de la población es la ecuación de Gompertz:
$$\frac{dy}{dt} = ry\ln\left(\frac{K}{y}\right),$$
donde r y K son constantes positivas.

(a) Dibuja el gráfico de $f(y)$ como función de y, encuentra los puntos críticos y determina si cada uno es asintóticamente estable o inestable.

(b) Para $0 \leq y \leq K$, determina dónde el gráfico de y como función de t es cóncavo hacia arriba y dónde es cóncavo hacia abajo.

(c) Para cada y en $0 < y \leq K$, demuestra que dy/dt dado por la ecuación de Gompertz nunca es menor que dy/dt según la ecuación logística.

Problema 3:

(a) Resuelve la ecuación de Gompertz

$$\frac{dy}{dt} = ry \ln\left(\frac{K}{y}\right),$$

sujeta a la condición inicial $y(0) = y_0$. Sugerencia: Puede ser útil hacer el cambio $u = \ln(y/K)$.

(b) Para los siguientes datos $r = 0.71/\text{año}, K = 80.5 \times 10^6\text{kg}, y_0/K = 0.25$, usa el modelo de Gompertz para encontrar el valor predicho de $y(2)$.

(c) Para los mismos datos que en la parte (b), usa el modelo de Gompertz para encontrar el tiempo τ en el cual $y(\tau) = 0.75K$.

Problema 4: A un nivel dado de esfuerzo, es razonable suponer que la tasa a la que se pescan los peces depende de la población y: cuanto más peces haya, más fácil será atraparlos. Por lo tanto, asumimos que la tasa a la que se pescan los peces está dada por Ey, donde E es una constante positiva, con unidades de 1/tiempo, que mide el esfuerzo total realizado para cosechar la especie de pez dada. Para incluir este efecto, la ecuación logística se reemplaza por

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y - Ey.$$

Esta ecuación es conocida como el modelo de Schaefer, en honor al biólogo M. B. Schaefer, quien la aplicó a las poblaciones de peces.

(a) Demuestra que si $E < r$, entonces hay dos puntos de equilibrio, $y_1 = 0$ y $y_2 = K(1-E/r) > 0$.

(b) Demuestra que $y = y_1$ es inestable y $y = y_2$ es asintóticamente estable.

(c) Un rendimiento sostenible Y de la pesquería es una tasa a la que se pueden pescar peces indefinidamente. Es el producto del esfuerzo E y la población asintóticamente estable y_2. Encuentra Y como una función del esfuerzo E; la gráfica de esta función se conoce como la curva rendimiento-esfuerzo.

(d) cDetermina E para maximizar Y y, por lo tanto, encuentra el rendimiento sostenible máximo Y_m.