ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
SEMESTRE 2025 - 2
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS PARA EL DESARROLLO
ENES JURIQUILLA
TAREA 4

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Viernes, 14 de marzo, 2025.
Antes de las 9:10 AM 100%
Después de las 9:10 AM y hasta las 12 AM 80%
No se aceptarán tareas después de la fecha límite.
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles.

Problema 1: Un tanque contiene 100 galones de agua y 50 onzas de sal. El agua que fluye hacia el tanque tiene una concentración de sal de

$$\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}\sin(t)\right) \text{ oz/gal}.$$

y fluye hacia el tanque a una tasa de 2 gal/min, mientras que la mezcla en el tanque fluye hacia afuera a la misma tasa.

a) Encuentra la cantidad de sal en el tanque en cualquier momento.
b) Grafica la solución para un periodo de tiempo lo suficientemente largo como para que veas el comportamiento final del gráfico.
c) El comportamiento a largo plazo de la solución es una oscilación alrededor de un cierto nivel constante. ¿Cuál es este nivel? ¿Cuál es la amplitud de la oscilación?

Problema 2: Supongamos que una cierta población tiene una tasa de crecimiento que varía con el tiempo y que esta población satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(0.5+\sin(t))y}{5}.$$

a) Si $y(0)=1$, encuentra (o estima) el tiempo τ en el que la población se ha duplicado. Elige otras condiciones iniciales y determina si el tiempo de duplicación τ depende de la población inicial.
b) Supón que la tasa de crecimiento es reemplazada por su valor promedio $1/10$. Determina el tiempo de duplicación τ en este caso.
c) Supón que el término $\sin(t)$ en la ecuación diferencial se reemplaza por $\sin(2t)$; es decir, la variación en la tasa de crecimiento tiene una frecuencia sustancialmente más alta. ¿Qué efecto tiene esto sobre el tiempo de duplicación τ?
d) Grafica las soluciones obtenidas en las partes (a), (b) y (c) en un mismo conjunto de ejes.

Problema 3: En los siguientes problemas, determina (sin resolver el problema) un intervalo en el cual la solución del problema de valor inicial es sabido que existe.

a) $(t-3)y' + (\ln(t))y = 2t$, $y(1)=2$.
b) $t(t-4)y' + y = 0$, $y(2)=1$.

c) $y' + (\tan t)y = \sin t$, $y(\pi) = 0$.
d) $(4 - t^2)y' + 2ty = 3t^2$, $y(-3) = 1$.

Problema 4:

Considera el problema de valor inicial $y' = y^{1/3}, y(0) = 0$.

a) ¿Existe una solución que pase por el punto $(1, 1)$? Si es así, encuéntrala.
b) ¿Existe una solución que pase por el punto $(2, 1)$? Si es así, encuéntrala.
c) Considera todas las posibles soluciones del problema de valor inicial dado. Determina el conjunto de valores que estas soluciones tienen en $t = 2$.