ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
SEMESTRE 2025 - 2
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS PARA EL DESARROLLO
ENES JURIQUILLA
TAREA 12

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Viernes, 23 de mayo, 2025.
Antes de las 9:10 AM 100%
Después de las 9:10 AM y hasta las 11:59 PM 80%
No se aceptarán tareas después de la fecha límite.
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles.

Problema 1: En cada uni de los siguientes problemas, determina el punto crítico $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$, y después clasifica su tipo y examina sus estabilidad haciendo una transformación $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{u}$.

a)
$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)
$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c)
$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Problema 2: En este problema indicamoms como mostrar que las trayectorias son elipses cuando los eigenvalores son puramente imaginarios. Consideremos el sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

a) Muestra que los eigenvalores de la matriz coeficiente son puramente imaginarios si y solo si

$$a_{11} + a_{22} = 0, \; a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0. \tag{0.0.1}$$

b) Las trayectorias del sistema anterior se pueden encontrar convirtiendo esa sistema en una ecuación escalar para y como función de x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y}. \tag{0.0.2}$$

Usa la primera de las ecuaciones en (0.0.1) para mostrar que la ecuación (0.0.2) es exacta.

c) Integrando la ecuación (0.0.2), muestra que

$$a_{21}x^2 + 2a_{22}xyxy - a_{12}y^2 = k,$$

donde k es una constante. Usa las ecuaciones (0.0.1) para concluir que la gráfica de la última ecuación es siempre una elipse.

Sugerencia: ¿Cómo es el discriminante de la forma cuadrática de la última ecuación?

Problema 3:

En este problema ilustramos cómo un sistema 2×2 con valores propios $\lambda \pm i\mu$ puede transformarse en el sistema

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} \boldsymbol{x}.$$

Usando un ejemplo particular, considera el sistema:

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & -2.5 \\ 1.8 & -1 \end{pmatrix} x = Ax. \tag{i}$$

(a) Muestra que los valores propios de este sistema son $r_1 = 0.5 + 1.5i$ y $r_2 = 0.5 - 1.5i$.

(b) Muestra que el vector propio correspondiente a r_1 puede elegirse como

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3-3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(c) Sea P la matriz cuyas columnas son las partes real e imaginaria de $\xi^{(1)}$. Así,

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \tag{iii}$$

Sea $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ y sustituye esta expresión en la Ecuación (i). Muestra que:

$$\boldsymbol{y}' = (P^{-1}AP)\boldsymbol{y} \tag{iv}$$

(d) Encuentra P^{-1} y muestra que:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0.5 & 1.5 \\ -1.5 & 0.5 \end{pmatrix} \tag{v}$$

Así, la Ecuación (v) tiene la forma de la ecuación (i).

Problema 4: Para cada uno de los siguientes sistemas:

(a) Encuentra todos los puntos críticos (soluciones de equilibrio).
(b) Utiliza una computadora para dibujar un campo direccional y el retrato de fase del sistema.
(c) A partir del (los) gráfico(s) de la parte (b), determina si cada punto crítico es asintóticamente estable, estable o inestable, y clasifícalo según su tipo.
(d) Describe la cuenca de atracción de cada punto crítico asintóticamente estable.

a.

$$\frac{dx}{dt} = x - xy, \quad \frac{dy}{dt} = y + 2xy$$

b.

$$\frac{dx}{dt} = 1 + 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 1 - 3x^2$$

c.

$$\frac{dx}{dt} = y(2 - x - y), \quad \frac{dy}{dt} = -x - y - 2xy.$$

Problema 5: En el siguiente problema, verifica que $(0,0)$ es un punto crítico, muestra que el sistema es lineal localmente, y discute el tipo y la estabilidad del punto crítico $(0,0)$ examinando el sistema lineal correspondiente.

$$\frac{dx}{dt} = x - y^2, \quad \frac{dy}{dt} = x - 2y + x^2$$