

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM
MODELACIÓN MATEMÁTICA DEL OCÉANO Y LA ATMÓSFERA
SEMESTRE 2024 - 2
TAREA 3

PROFESOR: DR. GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Miércoles, 13 de marzo, 2024.

Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Consideremos las ecuaciones de aguas someras lineales 1-D con rotación, profundidad característica constante H y velocidad zonal característica constante U_o , dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \eta + U_o \partial_x \eta + H \partial_x u = 0, \\ \partial_t u - fv + g \partial_x \eta = 0, \quad -\infty < x < \infty, \\ \partial_t v + fu = 0, \\ \eta(x, 0) = \eta_o(x), \\ u(x, 0) = u_o(x), \\ v(x, 0) = v_o(x), \end{array} \right.$$

donde η es la perturbación de la superficie libre, la velocidad total está dada por $U_o + u$ y v , y g es la constante gravitacional.

- (a) Encuentra la relación de dispersión para las soluciones de onda plana.
- (b) Considera la discretización en la figura 1. Para la derivada $\partial_x \eta$ utiliza la diferencia centrada. Encuentra la relación de dispersión correspondiente y muestra su gráfica. ¿Tiene la velocidad de grupo correcta?

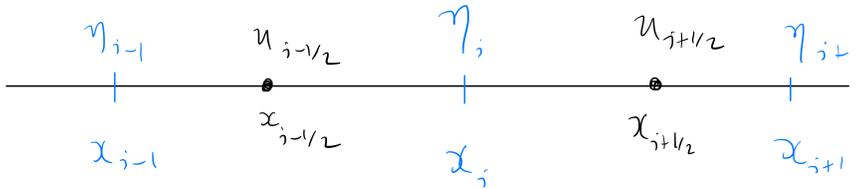


FIGURE 1. Malla escalonada.

Problema 2: Considera el modelo de Stommel para capas límite:

$$\epsilon \partial_x^2 \psi + \partial_x \psi = -1, 0 \leq x \leq 1,$$

con condiciones de frontera $\psi(0) = \psi(1) = 0$. Considera además el método de elementos finitos que usa las funciones de Chapeau, dando lugar al esquema

$$\frac{1}{6} (\partial_t u_{i-1} + 4\partial_t u_i + \partial_t u_{i+1}) + \frac{c}{2\Delta x} (u_{i+1} - u_{i-1}) - \frac{\nu}{\Delta x^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) = 0.$$

Como vimos en clase, esto nos da una aproximación espacial de orden 4. Calcula y grafica la relación de dispersión.