POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM
MODELACIÓN MATEMÁTICA DEL OCÉANO Y LA ATMÓSFERA
SEMESTRE 2024 - 2
TAREA 2

PROFESOR: DR. GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Miércoles, 6 de marzo, 2024.
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: (Velocidad de grupo). Considera soluciones de onda plana $\exp(kx - \omega t)$ con una relación de dispersión dada $\omega = \omega(k)$.

(a) Para k_1, k_2 números de onda dados, demuestra que el paquete de ondas

$$\alpha(x,t) = \sin(k_1 x - \omega_1 t) + \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

con $\omega_1 = \omega(k_1), \omega_2 = \omega(k_2)$, se puede escribir como

$$\alpha(x,t) = 2\sin(\bar{k}x - \bar{\omega}t)\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right),$$

donde $\bar{k} = (k_1 + k_2)/2, \Delta(k) = k_2 - k_1$, $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2, \Delta(\omega) = \omega_2 - \omega_1$.

Esto representa una onda sinoidal con frecuencia $\bar{\omega}/\bar{k}$ y número de onda $\bar{k}$, modulado por una función coseno. Este patrón de modulación envolvente se mueve con velocidad

$$c_g = \frac{\Delta(\omega)}{\Delta(k)} \longrightarrow_{\Delta k \to 0} \frac{\partial \omega}{\partial k}.$$

(b) Considera el caso $\bar{k} = 4.5, \Delta(k) = 0.5, \bar{\omega} = 4.5, \Delta(\omega) = 0.5$. ¿Cual es la velocidad de fase de la función sonoidal y la velocidad de grupo de la función coseno? Grafica la función a tiempo $t = 0$ en el dominio $[0, 40] \ni x$ y los contornos de la función en el espacio $[0, 40] \times [0, 10] \ni (x, t)$.

(c) Repite el ejercicio para $\bar{k} = 2, \Delta(k) = 0.5, \bar{\omega} = 4.5, \Delta(\omega) = 0.5$. ¿Qué diferencias observas?

Problema 2: Considera el modelo lineal para un fluido de aguas someras con profundidad característica constante H y velocidad zonal característica constante U_o, dada por

$$\begin{cases} \partial_t \eta + U_o \partial_x \eta + H \partial_x u &= 0, \\ \partial_t u + g \partial_x \eta &= 0, \quad -\infty < x < \infty, \\ \eta(x,0) &= \eta_o(x), \\ u(x,0) &= u_o(x), \end{cases}$$

donde η es la perturbación de la superficie libre, la velocidad total está dada por $U_o + u$, y g es la constante gravitacional.

(a) Encuentra la solución exacta.

(b) Encuentra la relación de dispersión para las soluciones de onda plana.

(c) Considera la discretización en la figura 1. Para la derivada $\partial_x \eta$ utiliza la diferencia centrada. Encuentra la relación de dispersión correspondiente y muestra su gráfica. ¿Tiene la velocidad de grupo correcta?

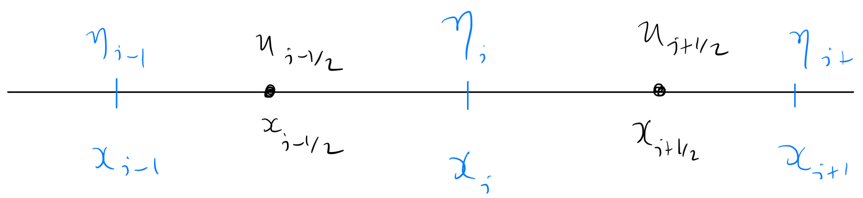

Figure 1. Malla escalonada.