POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM
MODELACIÓN MATEMÁTICA DEL OCÉANO Y LA ATMÓSFERA
SEMESTRE 2024 - 2
PROYECTO 1

PROFESOR: DR. GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Lunes, 6 de mayo, 2024.
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema: Considera la ecuación de advección en dos dimensiones $u_t+au_x+bu_y=0$. Definamos $k=\Delta t$, $h_x=\Delta x$, $h_y=\Delta y$, y consideremos la expansión de la solución $u(x,y,t+\Delta t)$ en serie de Taylor alrededor del punto (x,y,t), como sigue:

$$\begin{aligned} u(x,y,t+k) &= u(x,y,t)+ku_t+\frac{k^2}{2}u_{tt}+O(k^3) \\ &= u(x,y,t)+k(-au_x-bu_y) \\ &\quad +\frac{k^2}{2}(a^2u_{xx}+2abu_{xy}+b^2u_{yy})+O(k^3). \end{aligned}$$

Usando diferencias finitas de segundo orden para aproximar las derivadas, llegamos al método Lax-Wendroff bi-dimensional:

$$\begin{aligned} U_{j,k}^{n+1} &= U_{j,k}^n-\frac{\nu_x}{2}(U_{j+1,k}^n-U_{j-1,k}^n)-\frac{\nu_y}{2}(U_{j,k+1}^n-U_{j,k-1}^n) \\ &\quad +\frac{\nu_x^2}{2}(U_{j+1,k}^n-2U_{j,k}^n+U_{j-1,k}^n) \\ &\quad +\frac{\nu_y^2}{2}(U_{j,k+1}^n-2U_{j,k}^n+U_{j,k-1}^n) \\ &\quad +\frac{\nu_x\nu_y}{4}(U_{j+1,k+1}^n-U_{j-1,k+1}^n-U_{j+1,k-1}^n+U_{j-1,k-1}^n) \end{aligned}$$

donde $\nu_x=\dfrac{ak}{h_x}$, $\nu_y=\dfrac{bk}{h_y}$.

a) Encuentra el error de truncamiento.
b) Aplica el método de estabilidad von-Neumann para encontrar la región en el espacio (ν_x,ν_y) en donde el método numérico es estable. Obtener una expresión analítica puede ser complicado. Intenta obtener la región de forma numérica. ¿Qué forma tiene?
c) Encuentra una expresión analítica para una condición de estabilidad *suficiente*.