POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM
ANÁLISIS NUMÉRICO 1
SEMESTRE 2024 - 1
TAREA 8

PROFESOR: DR. GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Martes, 17 de octubre, 2023.
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Sea A una matriz real $m \times n$ de rango r con $m \geq n \geq r$. La matriz A tiene una factorización matricial de la forma:

$$A = U\Sigma V^t,$$

donde

- U es una matriz ortogonal $m \times m$.
- V es una matriz ortogonal $n \times n$,
- $$\Sigma = \begin{pmatrix} D & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}_{m\times n}$$
- $D = \text{diag}(\sigma_1, ..., \sigma_r)$ con $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$.

Los elementos $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ se conocen como los valores singulares de A. Las columnas $u_1, \ldots, u_m$ de U se llaman vectores singulares izquierdos de A, y las columnas $v_1, \ldots, v_n$ de V se llaman vectores singulares derechos de A.

a) Pruebe que la norma-2 de A está dada por el valor singular más grande de A:
$$\max_{||\boldsymbol{x}||_2=1} ||A\boldsymbol{x}||_2 = \sigma_1.$$

b) Sea $b \in \mathbb{R}^m$. Suponga que la matriz A tiene rango completo por columnas. Pruebe que la solución de mínimos cuadrados del sistema de ecuaciones lineales $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ está dada por:
$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\boldsymbol{u}_i^t \boldsymbol{b}}{\sigma_i} \boldsymbol{v}_i.$$

Problema 2: Implementa el método de potencias para calcular el eigenvalor dominante y el eigenvector correspondiente de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

tomando como vector inicial $\boldsymbol{x}_o = (0,\ 0,\ 1)^T$. Compara con la respuesta obtenida por algún paquete existente.