POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM
ANÁLISIS NUMÉRICO 1
SEMESTRE 2024 - 1
TAREA 6

PROFESOR: DR. GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Martes, 3 de octubre, 2023.

Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Al ajustar una línea recta $y = x_o + x_1 t$ a los 3 datos $(t_i, y_i) = (0,0), (1,0), (1,1)$, ¿es la solución al problema de mínimos cuadrados única? ¿Por qué?

Problema 2: Sea $\boldsymbol{x}$ la solución al problema de mínimos cuadrados $A\boldsymbol{x} \cong \boldsymbol{b}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sea $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}$ el vector residuo. ¿Cuál de los soguientes 3 vectores es un posible valor para $\boldsymbol{r}$? ¿Por qué?

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Problema 3:

i	x_i	y_i
1	0	1
2	$2-\sqrt{3}$	$1/2$
3	2	0
4	$2+\sqrt{3}$	$1/2$
5	4	1
6	$2+\sqrt{3}$	$3/2$
7	2	2
8	$2-\sqrt{3}$	$3/2$

Considere la familia de funciones bicuadráticas $\varphi_{\boldsymbol{\alpha}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\varphi_{\boldsymbol{\alpha}}(x,y) = \alpha_1 x^2 + \alpha_s y^2 + \alpha_3 xy + \alpha_4 x + \alpha_5 y + 1,$$

donde

$$\alpha = [\alpha_1 \cdots \alpha_5] \in \mathbb{R}^5.$$

Se desea ajustar una sección cónica:

$$\varphi_{\boldsymbol{\alpha}}(x,y) = 0,$$

a los puntos $(x_i, y_i),\ i = 1, \ldots, 8$ dados en la tabla de arriba minimizando la suma de cuadrados:

$$J(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{8} \varphi_{\boldsymbol{\alpha}}(x_i, y_i)^2.$$

a) Encuentre una matriz $A \in \mathbb{R}^{8\times 5}$ y un vector $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^8$ tales que

$$J(\boldsymbol{\alpha}) = ||A\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{b}||_2^2.$$

b) Suponga que:

$$A = QR,$$

donde Q una matriz de tamaño 8×5 con columnas ortonormales y R una matriz triangular superior de tamaño 5×5 tal que todos sus elementos en la diagonal principal son distintos de cero. Pruebe que el mínimo de J está dado por la solución del sistema de ecuaciones:

$$R\boldsymbol{\alpha} = Q^t \boldsymbol{b}.$$

c) Obtenga las ecuaciones normales correspondientes y compruebe que

$$\boldsymbol{\alpha}_{\min} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}^T$$

es la solución de esas ecuaciones.

d) Dibuje la sección cónica $\varphi_{\boldsymbol{\alpha}}(x, y) = 0$ que se obtiene con $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_{\min}$.

Problema 4: Queremos ajustar una circunferencia C a cuatro puntos $P_1 = (1, 4), P_2 = (3, 2), P_3 = (1, 0)$ y $P_4 = (-1, 3)$ en el sentido de mínimos cuadrados.

a) Use la ecuación general de una circunferencia para probar que las condiciones $Pi \in C, i = 1, 2, 3, 4$ se pueden escribir como el sistema de ecuaciones lineales

$$A\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 13 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}.$$

La circunferencia C depende de las componentes u_1, u_2 y u_3.

b) Resuelva las ecuaciones normales del sistema de ecuaciones lineales $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$.

c) Halle el centro y el radio de la circunferencia C con la solución del inciso (b).