POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM
ANÁLISIS NUMÉRICO 1
SEMESTRE 2024 - 1
TAREA 5

PROFESOR: DR. GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Martes, 19 de septiembre, 2023.

Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Demuestra que el método iterativo de Jacobi para resolver el sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ converge si A es diagonal dominante (estrictamente) por renglones. *Sugerencia:* Considera la norma ∞.

Problema 2: *Teorema de la Contracción.* Sea ϕ una función continua de valores reales sobre el intervalo $[a, b]$. Sea $x_0 \in [a, b]$. Suponga que ϕ es una contracción en

$$B(x0, r) = \{x \in [a, b] : |x - x_0| < r\},$$

esto es, para cualquier pareja de puntos $s, t \in B(x_0, r)$ se cumple que:

$$|\phi(s) - \phi(t)| \leq L|s - t|, 0 \leq L < 1.$$

Considere la iteración:

$$x_{n+1} = \phi(x_n), n \in \mathbb{N}$$

Suponga que:

$$|x_0 - x_1| \leq (1 - L)r.$$

a) Pruebe que la sucesión $\{x_n\}$ converge en la cerradura de $B(x_0, r)$.

b) Sea x^* el límite de la sucesión $\{x_n\}$. Pruebe la siguiente estimación del error:

$$|x_n - x^*| \leq |x_1 - x_0| \frac{L^n}{1 - L}.$$

Problema 3:

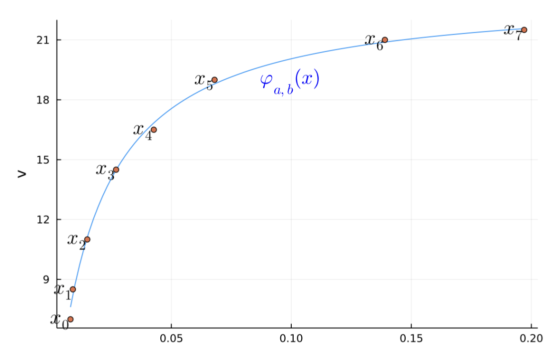

FIGURE 1. Ajuste de mínimos cuadrados $\varphi_{a,b}$ para los puntos (x_i, v_i), $i = 0, \ldots, 7$.

Deseamos determinar coeficientes a y b de modo que la función racional

$$\varphi_{a,b}(x) = \frac{ax}{b+x}, x \neq -b,$$

sea la mejor aproximación en el sentido de mínimos cuadrados para los puntos (x_i, v_i), $i = 0, \ldots, 7$ que se muestran en Fig. 1. Sea

$$S(a,b) = \sum_{i=0}^{7} \left(v_i - \varphi_{a,b}(x_i)\right)^2.$$

El problema de mínimos cuadrados correspondiente es:

$$\min_{a,b} S(a,b).$$

a) Halle las ecuaciones en los coeficientes a y b que debe cumplir la solución de mínimos cuadrados.

b) El problema de mínimos cuadrados se puede reducir a un sistema de ecuaciones lineales. Para ello la función objetivo S se reemplaza por:

$$P(a,b) = \sum_{i=0}^{7} (v_i(b+x_i) - ax_i)^2.$$

Halle el sistema de ecuaciones lineales en los coeficientes a y b que debe satisfacer la solución de mínimos cuadrados correspondiente.

Problema 4: Sea $\varphi : [a,b] \to [a,b]$ una función invertible y continuamente diferenciable. Suponga que:

$$\min_{x \in [a,b]} \varphi'(x) > 1.$$

Pruebe que la sucesión:

$$x_{k+1} = \varphi^{-1}(x_k)$$

converge a la solución x_* de la ecuación:

$$\varphi(x) = x,$$

para cualquier valor inicial $x_0 \in [a,b]$.