POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM
ANÁLISIS NUMÉRICO 1
SEMESTRE 2024 - 1
TAREA 4

PROFESOR: DR. GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Martes, 12 de septiembre, 2023.

Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Algunas matrices simétricas dependen de parámetros. Estas matrices pueden ser definidas positivas solamente para algunos valores de los parámetros.

Sean $a, b > 0$. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} b & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}_{n\times n}$$

El problema es hallar condiciones suficientes sobre los valores de a y b de modo que A sea una matriz definida positiva.

Una manera para identificar fácilmente los valores deseados de a y b es intercambiar los renglones y columnas de la matriz A de modo que A se transforme en la matriz:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a & -1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & b \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Si se obtienen valores de a y b para los que $\hat{A}$ es definida positiva, entonces se puede probar que la matriz A es definida positiva con esos mismos valores.

a) Halle una matriz de permutación P de tamaño $n \times n$ tal que

$$A = P^T \hat{A} P.$$

b) Tome $n = 5, a = n - 1$ y $b = 1$. Pruebe o refute que $\hat{A}$ es una matriz definida positiva.

c) Sea $n = 7$. Halle condiciones sobre los valores de a y b de modo que $\hat{A}$ sea una matriz definida positiva. *Sugerencia:* Factorize la matriz $\hat{A}$.

d) Pruebe que si $\hat{A}$ es definida positiva, entonces A es definida positiva.

Problema 2: Demuestre que la matriz A es positiva definida, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -3 & -3 & -3 \\ -3 & 10 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & 10 & -3 \\ -3 & -3 & -3 & 10 \end{pmatrix}$$

Sugerencia: Escriba la matriz A como una suma de matrices.

Problema 3:

a) Sea $v \in \mathbb{R}^3$, y sea
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$
Pruebe que la matriz
$$A = \begin{pmatrix} B & v \\ -v^T & 1 \end{pmatrix}$$
es positiva definida.

b) Suponga que la matriz $C = B - vv^T$ es positiva definida. Halle la factorización de Cholesky de A para cada $v \in \mathbb{R}^3$.

Problema 4: *Actualización de la Factorización de Cholesky*

Sea A una matriz real simétrica de tamaño 3×3. Suponga que existe una matriz triangular superior R de tamaño 3×3 con todos sus elementos positivos en la diagonal principal tal que:
$$A = R^t R.$$
Sea $y \in \mathbb{R}^3$. El objetivo es hallar una matriz $\tilde{R}$ de tamaño 4×3 con todos sus elementos iguales a cero debajo de la diagonal principal tal que:
$$A + yy^t = \tilde{R}^t \tilde{R}.$$
Encuentre una matriz ortogonal Q de tamaño 4×4 tal que la matriz:
$$\tilde{R} = Q \begin{pmatrix} R \\ y^t \end{pmatrix}$$
tiene todos sus elementos iguales a cero debajo de la diagonal principal.