POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM
ANÁLISIS NUMÉRICO 1
SEMESTRE 2024 - 1
TAREA 12

PROFESOR: DR. GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Viernes, 24 de noviembre, 2023.

Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1:

Determina los parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_3, \delta_1, \delta_3$ tal que $S(x)$ sea un spline cúbico de Hermite, donde:

$$S(x) = \begin{cases} \alpha_1(x+1)^3 + \beta_1(x+1)^2 + \gamma_1(x+1) + \delta_1, & x \in [-1, 0] \\ \alpha_2 x^3 + \beta_2 x^2 + 2x + 3, & x \in [0, 1] \\ \alpha_3(x-1)^3 + \beta_3(x-1)^2 + \gamma_3(x-1) + \delta_3, & x \in [1, 2], \end{cases}$$

con $S(-1) = 2, S'(-1) = 1, S(1) = 7, S'(1) = 7, S(2) = 14, S'(2) = 8$.

Problema 2: Sea f una función diferenciable de valores reales sobre el intervalo $[-1, 1]$, y sean $x_1, \ldots, x_n \in [-1, 1]$. La función f se aproxima por un polinomio que interpola tanto a f como a f' en los ceros de polinomios ortogonales para obtener una regla de cuadratura gaussiana:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) w_i.$$

A partir de los polinomios de Lagrange:

$$\ell_i(x) = \Pi_{k=1, k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, i = 1, \ldots, n,$$

se introduce un polinomio en la representación de Hermite:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) H_i(x) + \sum_{i=1}^{n} f'(x_i) K_i(x),$$

donde:

$$H_i = [1 - 2\ell'(x_i)(x - x_i)]\ell_i^2(x), \quad K_i(x) = (x - x_i)\ell_i^2(x), .i = 1, \ldots, n.$$

a) Pruebe que Q es un polinomio de grado $2n - 1$ que interpola tanto a f como a su derivada en los puntos $x_1, \ldots, , x_n$.

   Sugerencia: Halle las evaluaciones y pendientes de H_i y K_i en los puntos dados.

   Además de los polinomios interpolantes, se utiliza una familia de polinomios ortogonales respecto al intervalo $[-1, 1]$, a saber, los polinomios de Legendre:

$$\begin{aligned} P_o(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_k(x)) &= \left(\tfrac{2k-1}{k}\right) x P_{k-1}(x) - \left(\tfrac{k-1}{k}\right) P_{k-2}(x), k = 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

   Estos polinomios satisfacen la siguiente relación de ortogonalidad:

$$\int_{-1}^{1} P_i(x) P_j(x) dx = 0, \text{ para } i, j = 1, \ldots, n, \text{ con } i \neq j.$$

   Más aún, $\{P_0, \ldots, P_n\}$ es una base para los polinomios de hasta grado nx.

b) Tome $x_1, \ldots, x_n$ iguales a los ceros del polinomio P_n. Pruebe que:

$$\int_{-1}^{1} K_i(x)dx = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

c) Pruebe que los pesos de la cuadratura gaussiana están dados por:

$$w_i = \int_{-1}^{1} H_i(x)dx, \quad i = 1, \ldots, n.$$