POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM
ANÁLISIS NUMÉRICO 1
SEMESTRE 2024 - 1
TAREA 11

PROFESOR: DR. GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Viernes, 17 de noviembre, 2023.
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1:
Sea f una función diferenciable de valores reales sobre el intervalo $[-1, 1]$. Considere la regla de cuadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx w_1 f\left(-\frac{1}{2}\right) + w_2 f\left(\frac{1}{2}\right) + w_3 f'(1).$$

a) Determine los pesos w_1, w_2 y w_3 de modo que la regla de cuadratura dada sea exacta para polinomios de grado a lo más 2.
b) Use la regla de cuadratura dada con un cambio de variable adecuado para aproximar

$$\int_{0}^{1/2} x^3 dz$$

Problema 2: Sea f una función diferenciable sobre el intervalo finito $[a, b]$. Determine los pesos w_i de la regla de cuadratura

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx w_0 f(a) + w_1 f(b) + w_2 f'(a) + w_3 f'(b)$$

de modo que sea exacta para polinomios del grado más alto posible.
Problema 3: Cuadratura de Gauss-Chebyshev.
a) El polinomio de Chebyshev T_k de grado k se define como:

$$T_k(x) = \cos(k \ \arccos(x)),\ -1 \leq x \leq 1, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Demuestre que cada T_k es un polinomio de grado k. Para ello pruebe la relación de recurrencia:

$$T_{k+1}(x) + T_{k-1}(x) = 2xT_k(x), k = 1, 2, \ldots$$

Sugerencia: Use la identidad trigonométrica:

$$\cos(k + 1)t + \cos(k - 1)t = 2\cos(t)\cos(kt), k = 1, 2, \ldots$$

b) Pruebe que los polinomios de Chebyshev satisfacen la relación de ortogonalidad:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx = 0, \ \ \text{si } m \ \neq n.$$

c) Halle los nodos x_k y los pesos w_k de la regla de cuadratura:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} w_k f(x_k),$$

de modo que sea exacta para polinomios de grado menor o igual a $2n - 1$. *Sugerencia:* Escoga los nodos iguales a los ceros de T_n.