

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM
INTRODUCCIÓN A LOS MEDIOS CONTINUOS
SEMESTRE 2022 - 2
TAREA 11

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Lunes, 23 de mayo, 2022.

Antes de las 4:40 PM 100%

Después de las 4:40 PM y hasta las 12 PM 80%

Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Considera el problema

$$\begin{cases} \partial_t u + \frac{1}{x} \partial_x u = 0, & -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) = x^2, \end{cases}$$

que corresponde a una ecuación de transporte con coeficiente variable $a(x) = 1/x$. La velocidad de transporte $a(x)$ tiene una singularidad en $x = 0$.

- (a) Encuentra la solución exacta del problema de valor inicial anterior.
- (b) Grafica las curvas características $(x(t), t)$ en donde la solución $u(x(t), t) = u_o(x_o)$ es independiente de t .
- (c) Explica si cada (x, t) existe un punto inicial x_o tal que $x(0) = x_o$, $x(t) = x$.

Problema 2: Usando el método de las características, encuentra la solución exacta de la ecuación de Burgers para $t \leq 1$

$$\begin{cases} u_t + \partial_x \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0 & -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -2 \\ 2 + x & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ -x & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ -2 + x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{si } 2 < x \end{cases} \end{cases} .$$

Nota: Da la formula explícita de la solución en términos de x y de t .

Problema 3: Resuelve de manera exacta el problema de Riemann para la ecuación del tráfico

$$\begin{cases} \rho_t + \partial_x(\rho(1 - \rho)) = 0, \\ \rho(x, t = 0) = \begin{cases} \rho_\ell & \text{if } x \leq 0, \\ \rho_r & \text{if } x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Problema 4: Considera las ecuaciones de aguas someras:

$$\begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{g}{2} h^2 \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Encuentra las invariantes de Riemann para el salto hidráulico en la segunda familia.