SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (MÉTODOS EN DIFERENCIAS FINITAS) POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM SEMESTRE 2022 - 1 TAREA 9

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Miércoles, 27 de octubre, 2021.

Antes de las 4:40 PM 100%

Después de las 4:40 PM y hasta las 12 PM 80%

Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Compara la convergencia del método de Jacobi, Gauss-Seidel, y Gauss-Seidel con SOR para el sistema

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4u_1 & + & u_2 & & & = & -1 \\ u_1 & + & 6u_2 & + & 2u_3 & = & 0 \\ & & 2u_2 & + & 4u_3 & = & 0. \end{array}$$

Usa $\omega = 1.8$ en el cálculo SOR.

Problema 2: Usa la fórmula

$$U_{i,j} = \frac{1}{4}\left[U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}\right]$$

para la ecuación de Laplace en una región rectangular $[0,1] \times [0,1] \ni (x,y)$ con condiciones de frontera

$$u(x,0) = 1, u(x,1) = 2, u(0,y) = 1 + y, u(1,y) = 1 + y^2.$$

Usa una resolución de 100×100 puntos. Implementa el método de Jacobi y el Gauss-Seidel. ¿Convergen?

Problema 1:

Estamos resolviendo el sistema:

$Au = v$, con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las matrices G y los vectores Mv para cada método son:

Jacobi:

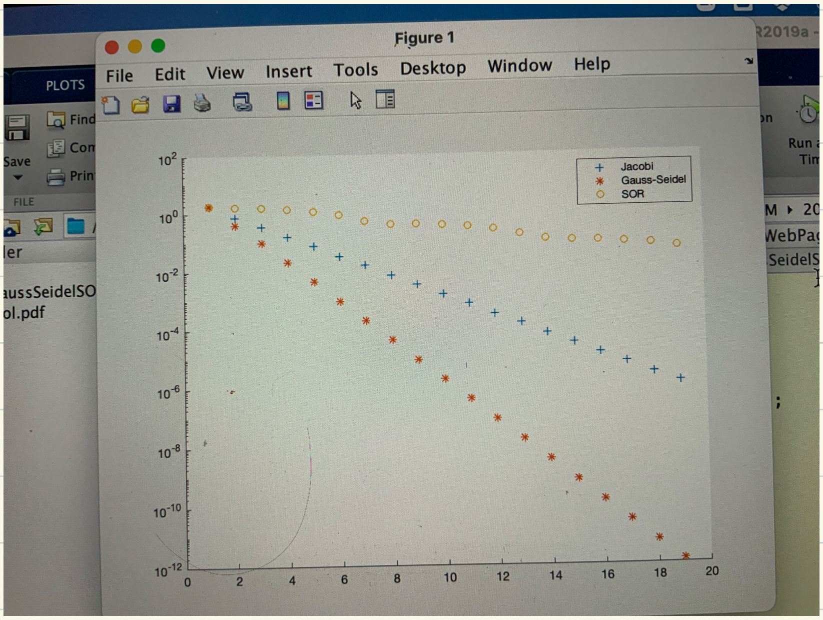
$$G_J = \begin{pmatrix} 0 & -0.25 & 0 \\ -0.1667 & 0 & -0.333 \\ 0 & -0.5 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_J v = \begin{pmatrix} -0.25 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauss-Seidel:

$$G_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0.0417 & -0.333 \\ 0 & -0.0208 & 0.1667 \end{pmatrix}, \quad M_{GS} v = \begin{pmatrix} -0.25 \\ 0.0417 \\ -0.0208 \end{pmatrix}$$

SOR:

$$G_{SOR} = \begin{pmatrix} -0.8 & -0.45 & 0 \\ 0.24 & -0.665 & -0.6 \\ -0.216 & 0.5985 & -0.26 \end{pmatrix}, \quad M_{SOR} v = \begin{pmatrix} -0.45 \\ 0.1350 \\ -0.1215 \end{pmatrix}$$



La solución es:

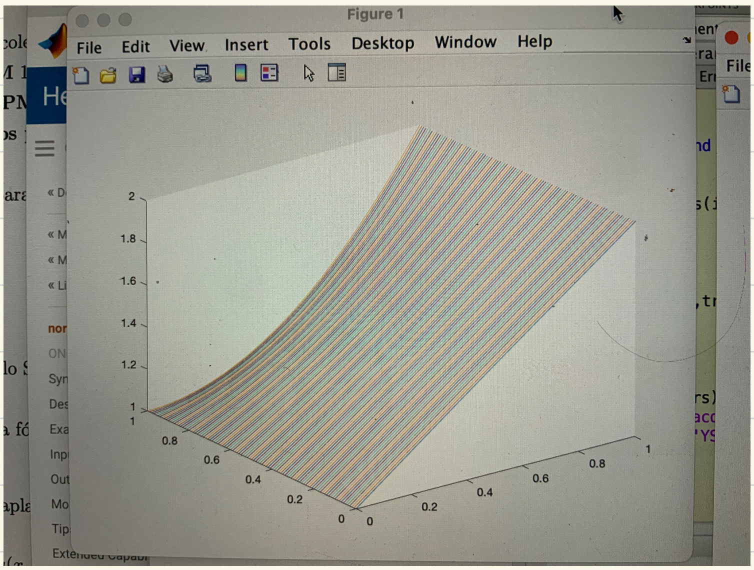
$$u = \begin{pmatrix} -0.2632 \\ 0.0526 \\ -0.0263 \end{pmatrix}$$

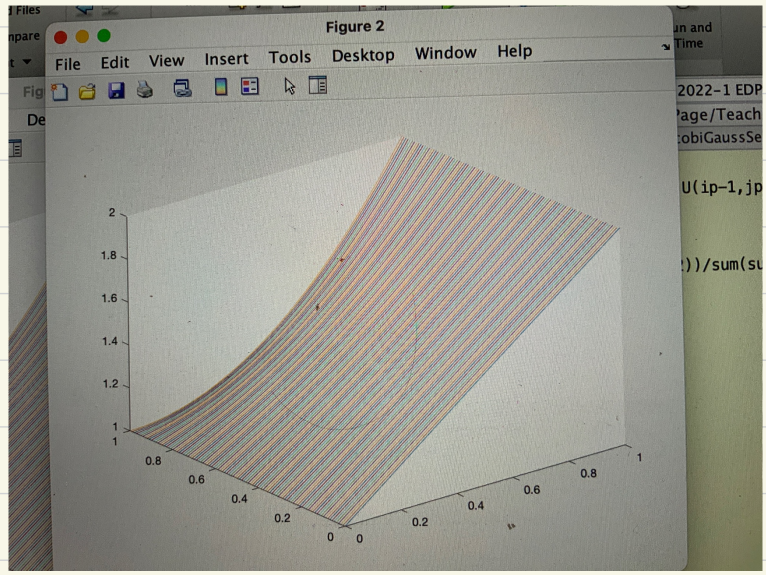
La gráfica anterior muestra el error en escala logarítmica. Como podemos ver, el mejor método es el Gauss-Seidel y el peor el SOR.

Problema 2:

Se adjuntan los códigos para los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel.

Las siguientes dos imagenes muestran los resultados de Jacobi y Gauss-Seidel: (20 000 iteraciones)





Sin embargo, el error relativo $\|U^{(k)}-U^{(k-1)}\| / \|U^{(k)}\|$ (norma L^2) en la siguiente gráfica (en escala semi-logarítmica) muestra que Gauss-Seidel es mejor que Jacobi.