SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (MÉTODOS EN DIFERENCIAS FINITAS) POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM SEMESTRE 2022 - 1 TAREA 8

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Lunes, 18 de octubre, 2021.
Antes de las 4:40 PM 100%
Después de las 4:40 PM y hasta las 12 PM 80%
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Una ecuación de la forma

$$au_{xx} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g(x, y)$$

se dice que es esencialmente auto-adjunta si

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(d - a_x)/a\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[(e - c_y)/c\right].$$

Supongamos que esta relación se satisface. Encuentra una función ϕ de tal forma que la ecuación original se puede escribir en forma auto-adjunta al multiplicar la ecuación original por ϕ.

Problema 2: Resuelve el sistema

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

por el método de Gauss-Seidel y por el SOR (usa $\omega = 1.5$). Escribe ambas iteraciones en forma matricial.

Problema 1:

Forma auto-adjunta:

$$(a u_x)_x + (c u_y)_y + f u = g(x,y)$$

Forma esencialmente auto-adjunta:

$$a u_{xx} + c u_{yy} + d u_x + e u_y + f u = g(x,y)$$

con $\frac{\partial}{\partial y}\left[(d - a_x)/a \right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[(e - c_y)/c \right]$.

Hint: multiplicar por ϕ:

$$a u_{xx} \phi + c u_{yy} \phi + d u_x \phi + e u_y \phi + f u \phi = g \phi$$

$$u_{xx} a\phi = \partial_x (a\phi u_x) - (a\phi)_x u_x$$

$$u_{yy} c\phi = \partial_y (c\phi u_y) - (c\phi)_y u_y$$

$$\Rightarrow \partial_x (a\phi u_x) + \partial_y (c\phi u_y) + (d\phi - (a\phi)_x) u_x$$
$$+ (e\phi - (c\phi)_y) u_y$$
$$+ (f\phi) u = g\phi$$

$\Rightarrow$ Escogemos ϕ tal que:

$(a\phi)_x = d\phi$, $\quad (c\phi)_y = e\phi$

$\Rightarrow a_x \phi + a \phi_x = d\phi$

$\Rightarrow (d - a_x)/a \, \phi = \phi_x \Rightarrow \dfrac{d - a_x}{a} = \partial_x (\log \phi)$

$c_y \phi + c \phi_y = e\phi \Rightarrow \dfrac{e - c_y}{c} = \partial_y (\log \phi)$

Necesitamos entonces que $\left(\dfrac{d - a_x}{a} , \dfrac{e - c_y}{c} \right)$ sea un campo gradiente y para eso se requiere precisamente que:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[(d - a_x)/a \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[(e - c_y)/c \right]$$

Tomando a $\log \phi$ como este potencial, tenemos que:

$$\partial_x (\tilde{a} u_x) + \partial_y (\tilde{c} u_y) + \tilde{f} u = \tilde{g}$$

con $\tilde{a} = a\phi$, $\tilde{c} = c\phi$, $\tilde{f} = f\phi$, $\tilde{g} = g\phi$

Problema 2:

Estamos aproximando la solución al sistema:

$Au = v$

con $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

En la descomposición tenemos:

$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Gauss-Seidel:

El método de Gauss-Seidel se escribe como:

$u^{(k)} = G u^{(k-1)} + Mv$, con

$G = -(R+D)^{-1} S$, $Mv = (R+D)^{-1} v$.

donde en este caso:

$G \approx \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{24} & -7/24 \\ 0 & \frac{1}{24} & 5/24 \end{pmatrix}$, $Mv = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/24 \\ 7/24 \end{pmatrix}$

SOR:

$$G = (D+\omega R)^{-1}((1-\omega)D - \omega S), \quad M\vartheta = (D+\omega R)^{-1}\omega\vartheta$$

Para $\omega = 1.5$, estas matrices se aproximan a:

$$G \approx \begin{pmatrix} -0.5 & 0.375 & -0.375 \\ 0.125 & -0.4062 & -0.4062 \\ 0.0938 & 0.4453 & -0.0547 \end{pmatrix}, \quad M\vartheta = \begin{pmatrix} -0.375 \\ 0.0938 \\ 0.4453 \end{pmatrix}$$

La solución en este caso se aproxima a:

$$u = \begin{pmatrix} -12/37 \\ -5/74 \\ 27/74 \end{pmatrix}$$

En esta foto se muestra el error en una gráfica del error vs el número de pasos. Se usó escala logaritmica. En este caso, el Gauss-Seidel es mejor que el SOR.