SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES
(MÉTODOS EN DIFERENCIAS FINITAS)
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM
SEMESTRE 2022 - 1
TAREA 7

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Lunes, 11 de octubre, 2021.
Antes de las 4:40 PM 100%
Después de las 4:40 PM y hasta las 12 PM 80%
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Considera la ecuación de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, 0 < x < 1, 0 < y < 1$$

con las condiciones de frontera

$$u_x(0, y) = g_o(y), u_x(1, y) = g_1(y), u_y(x, 0) = h_o(x), u_y(x, 1) = h_1(x).$$

Considera además el método numérico

$$U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 4U_{i,j} = 0, i, j = 0, \ldots, M, h = 1/M,$$

en donde las condiciones de frontera se aproximan por

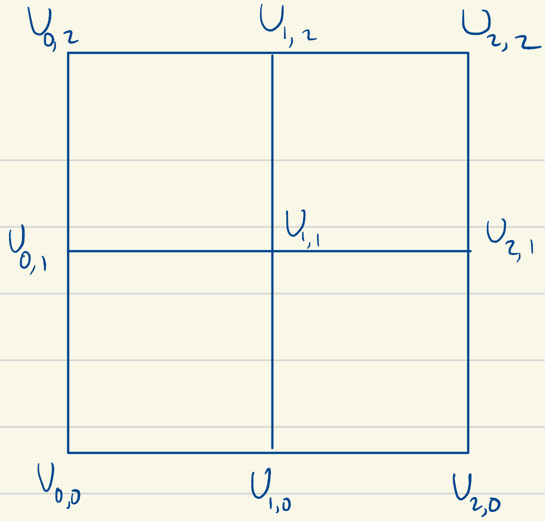
$$\frac{U_{1,j} - U_{-1,j}}{2h} = g_{0,j}, \quad j = 0, \ldots, M$$

$$\frac{U_{3,j} - U_{1,j}}{2h} = g_{1,j}, \quad j = 0, \ldots, M$$

$$\frac{U_{i,1} - U_{i,-1}}{2h} = h_{0,i}, \quad i = 0, \ldots, M$$

$$\frac{U_{i,3} - U_{i,1}}{2h} = h_{1,i}, \quad i = 0, \ldots, M.$$

Para $M = 2$ ($h = 1/2$), escribe el sistema en forma matricial (9 ecuaciones) y demuestra que la matriz es singular. Explica por qué ocurre así.



Usando las condiciones de frontera, tenemos:

$$\frac{U_{1,0} - U_{-1,0}}{2h} = g_{0,0} \Rightarrow U_{-1,0} = U_{1,0} - 2h\, g_{0,0}$$

$$\frac{U_{0,1} - U_{0,-1}}{2h} = h_{0,0} \Rightarrow U_{0,-1} = U_{0,1} - 2h\, h_{0,0}$$

$$U_{1,0} + U_{-1,0} + U_{0,1} + U_{0,-1} - 4U_{0,0} = 0$$

$$\Rightarrow 2U_{1,0} + 2U_{0,1} - 4U_{0,0} = 2h\, g_{0,0} + 2h\, h_{0,0}$$

$$\frac{U_{1,1} - U_{-1,1}}{2h} = g_{0,1} \Rightarrow U_{-1,1} = U_{1,1} - 2h\, g_{0,1}$$

$$U_{1,1} + U_{-1,1} + U_{0,2} + U_{0,0} - 4U_{0,1} = 0$$

$$\Rightarrow 2U_{1,1} + U_{0,2} + U_{0,0} - 4U_{0,1} = 2h\, g_{0,1}$$

$$\frac{U_{1,2} - U_{-1,2}}{2h} = g_{0,2} \Rightarrow U_{-1,2} = U_{1,2} - 2h\, g_{0,2}$$

$$\frac{U_{0,3} - U_{0,1}}{2h} = h_{0,2} \Rightarrow U_{0,3} = U_{0,1} + 2h\, h_{0,2}$$

$$U_{1,2} + U_{-1,2} + U_{0,3} + U_{0,1} - 4U_{0,2} = 0$$

$$\Rightarrow 2U_{1,2} + 2U_{0,1} - 4U_{0,2} = 2h\, g_{0,2} - 2h\, h_{0,2}$$

$$\frac{U_{1,1}-U_{1,-1}}{2h} = g_{1,0} \Rightarrow U_{1,-1} = U_{1,1} - 2hg_{1,0}$$

$$U_{2,0} + U_{0,0} + U_{1,1} + U_{1,-1} - 4U_{1,0} = 0$$

$$\Rightarrow U_{2,0} + U_{0,0} + 2U_{1,1} - 4U_{1,0} = 2hg_{1,0}$$

$$U_{2,1} + U_{0,1} + U_{1,2} + U_{1,0} - 4U_{1,1} = 0$$

$$\frac{U_{1,3}-U_{1,1}}{2h} = h_{1,2} \Rightarrow U_{1,3} = U_{1,1} + 2hh_{1,2}$$

$$U_{2,2} + U_{0,2} + U_{1,3} + U_{1,1} - 4U_{1,2} = 0$$

$$\Rightarrow U_{2,2} + U_{0,2} + 2U_{1,1} - 4U_{1,2} = -2hh_{1,2}$$

$$\frac{U_{3,0}-U_{1,0}}{2h} = g_{2,0} \Rightarrow U_{3,0} = U_{1,0} + 2hg_{2,0}$$

$$\frac{U_{2,1}-U_{2,-1}}{2h} = h_{2,0} \Rightarrow U_{2,-1} = U_{2,1} - 2hh_{2,0}$$

$$U_{3,0} + U_{1,0} + U_{2,1} + U_{2,-1} - 4U_{2,0} = 0$$

$$\Rightarrow 2U_{1,0} + 2U_{2,1} - 4U_{2,0} = -2hg_{2,0} + 2hh_{2,0}$$

$$\frac{U_{3,1}-U_{1,1}}{2h} = g_{2,1} \Rightarrow U_{3,1} = U_{1,1} + 2hg_{2,1}$$

$$U_{3,1} + U_{1,1} + U_{2,2} + U_{2,0} - 4U_{2,1} = 0$$

$$\Rightarrow 2U_{1,1} + U_{2,2} + U_{2,0} - 4U_{2,1} = -2hg_{2,1}$$

$$\frac{U_{3,2}-U_{1,2}}{2h} = g_{2,2} \Rightarrow U_{3,2} = U_{1,2} + 2h\, g_{2,2}$$

$$\frac{U_{2,3}-U_{2,1}}{2h} = h_{2,2} \Rightarrow U_{2,3} = U_{2,1} + 2h\, h_{2,2}$$

$$U_{3,2} + U_{1,2} + U_{2,3} + U_{2,1} - 4U_{2,2} = 0$$

$$\Rightarrow 2U_{1,2} + 2U_{2,1} - 4U_{2,2} = -2h\, g_{2,2} - 2h\, h_{2,2}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} U_{0,0} & U_{0,1} & U_{0,2} & U_{1,0} & U_{1,1} & U_{1,2} & U_{2,0} & U_{2,1} & U_{2,2} \end{array} \\
\begin{bmatrix}
-4 & 2 & & 2 & & & & & \\
1 & -4 & 1 & & 2 & & & & \\
 & 2 & -4 & & & 2 & & & \\
1 & & & -4 & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 1 & -4 & 1 & & 1 & \\
 & & 1 & & 2 & -4 & & & 1 \\
 & & & 2 & & & -4 & 2 & \\
 & & & & 2 & & 1 & -4 & 1 \\
 & & & & & 2 & & 2 & -4
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix} U_{0,0} \\ U_{0,1} \\ U_{0,2} \\ U_{1,0} \\ U_{1,1} \\ U_{1,2} \\ U_{2,0} \\ U_{2,1} \\ U_{2,2} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 2h\,g_{0,0} + 2h\,h_{0,0} \\ 2h\,g_{0,1} \\ 2h\,g_{0,2} - 2h\,h_{0,2} \\ 2h\,g_{1,0} \\ 0 \\ -2h\,h_{1,2} \\ -2h\,g_{2,0} + 2h\,h_{2,0} \\ -2h\,g_{2,1} \\ -2h\,g_{2,2} - 2h\,h_{2,2} \end{bmatrix}$$

El determinante se puede calcular directamente. Sin embargo, usamos aquí Mathematica para la verificación.