**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES**
**(MÉTODOS EN DIFERENCIAS FINITAS)**
**POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM**
**SEMESTRE 2022 - 1**
**TAREA 6**

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

**Para entregar :** Lunes, 4 de octubre, 2021.
**Antes de las 4:40 PM** 100%
**Después de las 4:40 PM y hasta las 12 PM** 80%
**Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles**

**Problema 1:** Describe un algoritmo explícito de la forma

$$U_{i,j+1} = c_1 U_{i+1,j} + c_o U_{i,j} + c_{-1} U_{i-1,j} + k d_{i,j}$$

para el problema

$$u_t = e^{-x} u_{xx} + x u_x + e^x, 0 \leq x \leq 1, u(x,0) = 0, u(0,t) = 1/(t+1), u_x(1,t) = u(1,t).$$

**Problema 2:** Muestra que la ecuación de difusión con simetría esférica, $u_t = u_{xx} + 2x^{-1}u_x$ se transforma en la ecuación $w_t = w_{xx}$ bajo el cambio de coordenadas dependiente $w = xu$.

**Problema 3:** La ecuación "casi" lineal $u_t = u_{xx} + f(u)$ ocurre en problemas de reacción-difusión. Para $f(u) = u^2$, aplica el argumento de estabilidad-convergencia visto en clase para encontrar un criterio de estabilidad.

# Problema 1:

Una posible discretización es:

$$\frac{U_{i,j+1}-U_{i,j}}{k} = e^{-x_i}\,\frac{U_{i+1,j}-2U_{i,j}+U_{i-1,j}}{h^2} + x_i\,\frac{U_{i+1,j}-U_{i-1,j}}{2h} + e^{x_i}$$

La condición inicial nos da: $U_{i,0}=0$.

En el interior tenemos:

$$\Rightarrow U_{i,j+1} = U_{i,j} + \frac{ke^{-x_i}}{h^2}\left(U_{i+1,j}-2U_{i,j}+U_{i-1,j}\right) + \frac{kx_i}{2h}\left(U_{i+1,j}-U_{i-1,j}\right) + ke^{x_i}$$

$$= \left(\frac{ke^{-x_i}}{h^2}+\frac{kx_i}{2h}\right)U_{i+1,j} + \left(1-\frac{2ke^{-x_i}}{h^2}\right)U_{i,j} + \left(\frac{ke^{-x_i}}{h^2}-\frac{kx_i}{2h}\right)U_{i-1,j} + ke^{x_i}$$

para $i=1,\dots,M-1$

Esto nos da: $c_0 = \frac{ke^{-x_i}}{h^2}+\frac{kx_i}{2h}$, $c_1 = 1-\frac{2ke^{-x_i}}{h^2}$, $c_2 = \frac{ke^{-x_i}}{h^2}-\frac{kx_i}{2h}$

$d_{i,j} = e^{x_i}$

Para $i=0$, $U_{0,j} = \frac{1}{1+t_j}$

Para $i=M$, usando diferencias centradas tenemos:

$$\frac{U_{M+1,j}-U_{M-1,j}}{2h} = U_{M,j} \Rightarrow U_{M+1,j} = U_{M-1,j}+2hU_{M,j}$$

$$\Rightarrow U_{M,j+1} = \left(\frac{ke^{-x_i}}{h^2}+\frac{kx_i}{2h}\right)\left(U_{M-1,j}+2hU_{M,j}\right) + \left(1-\frac{2ke^{-x_i}}{h^2}\right)U_{M,j} + \left(\frac{ke^{-x_i}}{h^2}-\frac{kx_i}{2h}\right)U_{M-1,j} + ke^{x_i}$$

$$= \left(\frac{2ke^{-1}}{h}+k+1-\frac{2ke^{-1}}{h^2}\right)U_{M,j} + \frac{2ke^{-1}}{h^2}U_{M-1}+ke$$

# Problema 2:

$u_t = u_{xx} + 2x^{-1} u_x$

Cambio de coordenadas: $w = xu$

$\Rightarrow u = x^{-1} w$

Sustituyendo obtenemos:

$u_t = x^{-1} w_t$

$u_x = -x^{-2} w + x^{-1} w_x$

$$u_{xx} = 2x^{-3} w - x^{-2} w_x - x^{-2} w_x + x^{-1} w_{xx}$$
$$= 2x^{-3} w - 2x^{-2} w_x + x^{-1} w_{xx}$$

$$\Rightarrow x^{-1} w_t = 2x^{-3} w - 2x^{-2} w_x + x^{-1} w_{xx} + 2x^{-1}\left(-x^{-2} w + x^{-1} w_x\right)$$

$$\Rightarrow w_t = \cancel{2x^{-2} w} - \cancel{2x^{-1} w_x} + w_{xx} - \cancel{2x^{-2} w} + \cancel{2x^{-1} w_x}$$

$\therefore w_t = w_{xx}$.

# Problema 3:

$$u_t = u_{xx} + u^2 \qquad = \phi(x, t, u, u_x, u_{xx})$$

En este caso

$$\frac{\partial \phi}{\partial u_{xx}} = 1 = a > 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial u_x} = 0 \, , \quad \frac{\partial \phi}{\partial u} = 2u$$

Vamos a pedir restringirnos al dominio en donde $|u| \leq 1$

$$\Rightarrow |\phi_u| + |\phi_{u_x}| + |\phi_{u_{xx}}| = 2|u| + 1 = 3 = b$$

Siguiendo el análisis visto en clase, tenemos que el método numérico clasico correspondiente es estable si:

$$h \leq \frac{2a}{b} = \frac{2}{3} \, , \qquad 0 < r = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1 - bk}{2b} = \frac{1 - 3k}{6}$$