SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (MÉTODOS EN DIFERENCIAS FINITAS) POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM SEMESTRE 2022 - 1 TAREA 5

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Miércoles, 22 de septiembre, 2021.
Antes de las 4:40 PM 100%
Después de las 4:40 PM y hasta las 12 PM 80%
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Para $\theta \geq 0$, examina la estabilidad de la fórmula

$$(1+\theta)\frac{U_{i,j+1}-U_{i,j}}{k}-\theta\frac{U_{i,j}-U_{i,j-1}}{k}=\frac{U_{i+1,j+1}-2U_{i,j+1}+U_{i-1,j+1}}{h^2}$$

usando el método matricial. Usa las condiciones de frontera Dirichlet cero.

Problema 2: Encuentra el error de truncamiento de la formula del problema 1 y examina la consistencia del método numérico.

Problema 1:

$$(1+\theta)(U_{i,j+1}-U_{i,j})-\theta(U_{i,j}-U_{i,j-1})=r(U_{i+1,j+1}-2U_{i,j+1}+U_{i-1,j+1})$$

$r=k/h^2$.

$$\Rightarrow -rU_{i+1,j+1}+(1+\theta+2r)U_{i,j+1}-rU_{i-1,j+1}$$

$$=(1+2\theta)U_{i,j}-\theta U_{i,j-1}$$

Usando condiciones de frontera Dirichlet cero, tenemos:

$AV_{j+1}=BV_j+CV_{j-1}$, donde:

$$A=\begin{bmatrix} 1+\theta+2r & -r & & & \\ -r & 1+\theta+2r & -r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -r & 1+\theta+2r & -r \\ & & & -r & 1+\theta+2r \end{bmatrix}, \quad B=(1+2\theta)I, \quad C=-\theta I.$$

$$W_{j+1}=\begin{bmatrix} V_{j+1} \\ V_j \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A^{-1}B & A^{-1}C \\ I & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_j \\ V_{j-1} \end{bmatrix}=PW_j$$

Necesitamos obtener los e-valores de P.

$$PW=\mu W \Rightarrow A^{-1}BW_1+A^{-1}CW_2=\mu W_1$$
$$W_1=\mu W_2$$
$$\Rightarrow \mu A^{-1}BW_2+A^{-1}CW_2=\mu^2 W_2$$

$$\Rightarrow \mu(1+2\theta) A^{-1} w_2 - \theta A^{-1} w_2 = \mu^2 w_2$$

$$\Rightarrow (\mu(1+2\theta) - \theta) A^{-1} w_2 = \mu^2 w_2$$

$$\Rightarrow \frac{\mu(1+2\theta)-\theta}{\mu^2} w_2 = A w_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -r & & \\ -r & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -r \\ & & -r & 0 \end{bmatrix} w_2 = \left(\frac{\mu(1+2\theta)-\theta}{\mu^2} - (1+\theta+2r) \right) w_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} w_2 = -\frac{1}{r} \frac{\mu(1+2\theta)-\theta-(1+\theta+2r)\mu^2}{\mu^2} w_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -2 \end{bmatrix} w_2 = \left(\frac{(1+\theta+2r)\mu^2 - \mu(1+2\theta)+\theta}{r\mu^2} - 2 \right) w_2$$

Ya sabemos que los e-valores de la última matriz son

$$-4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right), \quad n = 1, \ldots, M-1$$

$$\Rightarrow \frac{(1+\theta+2r)\mu^2 - \mu(1+2\theta)+\theta}{r\mu^2} - 2 = -4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)$$

$$\Rightarrow (1+\theta+2r)\mu^2 - \mu(1+2\theta)+\theta = \left(2-4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)\right) r\mu^2$$

$$\Rightarrow \left(4r\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)+1+\theta\right)\mu^2-(1+2\theta)\mu+\theta=0$$

$$\Rightarrow \mu=\frac{1+2\theta\pm\sqrt{(1+2\theta)^2-4\left(4r\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)+1+\theta\right)\theta}}{2\left(4r\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)+1+\theta\right)}$$

$$=\frac{1+2\theta\pm\sqrt{1+\cancel{4\theta}+\cancel{4\theta^2}-16r\theta\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)-\cancel{4\theta}-\cancel{4\theta^2}}}{8r\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)+2+2\theta}$$

$$=\frac{1+2\theta\pm\sqrt{1-16r\theta\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)}}{8r\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)+2+2\theta}$$

Caso: $1-16r\theta\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)>0$

Para estabilidad, necesitamos:

$$-8r\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)-2-2\theta\leq 1+2\theta\pm\sqrt{1-16r\theta\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)}\leq 8r\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)+2+2\theta$$

La segunda desigualdad se reduce a:

$$\pm\sqrt{1-16r\theta\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)}\leq 8r\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)+1$$

$$\Leftarrow\ 1-16r\theta\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)\leq 1+16r\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)+64r^2\,\text{sen}^4\left(\frac{n\pi h}{2}\right)$$

lo cual se satisface.

La primer desigualdad se reduce a:

$$-8r\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right) \pm \sqrt{1-16r\theta\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)} \leq 3+4\theta$$

$$\Leftrightarrow\ -8r\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right) + \sqrt{1-16r\theta\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)} \leq 3+4\theta$$

$$x = 8r\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)$$

$$\Rightarrow -x + \sqrt{1-2\theta x} \leq 3+4\theta \quad , \quad x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-2\theta x} \leq x+3+4\theta$$

$$\Leftrightarrow 1-2\theta x \leq x^2+9+16\theta^2+6x+8x\theta+24\theta$$

$$\Leftrightarrow x^2+(6+10\theta)x+8+16\theta^2+24\theta \geq 0.$$

Y esto siempre se cumple.

Caso: $1-16r\theta\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right) < 0$

$$\Rightarrow |\mu| = \frac{1}{8r\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)+2+2\theta}\sqrt{(1+2\theta)^2-1+16r\theta\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{8r\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)+2+2\theta}\sqrt{4\theta+4\theta^2+16r\theta\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)}$$

$$= \frac{\theta^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\theta+4r\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)}}{1+\theta+4r\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)} = \sqrt{\frac{\theta}{1+\theta+4r\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)}} \leq 1$$

para $\theta \geq 0$

$\therefore$ El método es incondicionalmente estable.

Problema 2:

El error de truncamiento es:

$$\tau = (1+\theta)\frac{1}{k}\left(u(x,t+k)-u(x,t)\right) - \theta\frac{1}{k}\left(u(x,t)-u(x,t-k)\right)$$

$$-\frac{1}{h^2}\left(u(x-h,t+k)-2u(x,t+k)+u(x+h,t+k)\right)$$

$$= (1+\theta)\left(u_t + u_{tt}\frac{k}{2} + u_{ttt}\frac{k^2}{6} + \dots\right)$$

$$-\theta\left(u_t - u_{tt}\frac{k}{2} + u_{ttt}\frac{k^2}{6} + \dots\right) + O(k^3)$$

$$-u_{xx}(x,t+k) - \frac{1}{h^2}\left(u_{xxxx}(x,t+k)\frac{h^4}{12}\right) + O(h^3)$$

$$= \cancel{u_t} + (1+2\theta)u_{tt}\frac{k}{2} + u_{ttt}\frac{k^2}{6} + O(k^3)$$

$$-\cancel{u_{xx}} - u_{xxt}k - u_{xxtt}\frac{k^2}{2} + O(k^3) - u_{xxxx}\frac{h^2}{12} + O(h^3)$$

$$\Rightarrow \tau = O(k+h^2)$$

y si $\theta = \frac{1}{2}$, $\tau = O(k^2+h^2)$.