**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES**
**(MÉTODOS EN DIFERENCIAS FINITAS)**
**POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM**
**SEMESTRE 2022 - 1**
**TAREA 4**

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

**Para entregar :** Miércoles, 15 de septiembre, 2021.
**Antes de las 4:40 PM** 100%
**Después de las 4:40 PM y hasta las 12 PM** 80%
**Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles**

**Problema 1:** Ecuaciones no-lineales de la forma

$$u_t = u_{xx} + \phi(x, t, u)$$

aparecen en problemas de difusión con reacciones químicas. Condiciones auxiliares típicas son

$$u(0, t) = f(t), u(1, t) = g(t), u(x, 0) = h(x).$$

Usa la fórmula general implícita con $\lambda$ y $r$ arbitrarios visto en clase para derivar una aproximación en diferencias finitas. ¿Aplica el algoritmo de Thomas?

**Problema 2:** Considera la ecuación $u_t = u_{xx}$ con las condiciones de frontera

$$u(0, t) = e^{-t},\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0.$$

Considera la fórmula general implícita con $\lambda$ y $r$ arbitrarios visto en clase para derivar una aproximación en diferencias finitas y escríbelo en forma matricial.

**Problema 3:** Implementa el análisis de estabilidad de Fourier para el método explícito basado en diferencias centradas de la ecuación

$$u_t = u_{xx} + u_x + u.$$

¿Cómo afecta la derivada de primer orden al análisis de estabilidad?

# Problema 1:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \phi(x,t,u) \\ u(0,t) = f(t), \quad u(1,t) = g(t), \quad u(x,0) = h(x) \end{cases}$$

Hay varias maneras de discretizar el término $\phi$

Una opción es:

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} = \lambda \frac{1}{\Delta x^2}\left(U_{i-1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i+1,j+1}\right) + (1-\lambda)\frac{1}{\Delta x^2}\left(U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}\right)$$

$$+ \lambda \phi(x_i, t_j, U_{i,j+1}) + (1-\lambda)\phi(x_i, t_j, U_{i,j}).$$

En este caso, no hay manera de escribirlo en forma matricial a menos de que $\phi$ sea lineal en $u$:

$$\phi(x,t,u) = \phi_0(x,t) + \phi_1(x,t)u$$

$$\Rightarrow U_{i,j+1} = U_{i,j} + \lambda r\left(U_{i-1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i+1,j+1}\right) + (1-\lambda)r\left(U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}\right)$$

$$+ \lambda k\, \phi_0(x_i, t_{j+1}) + \lambda k\, \phi_1(x_i, t_{j+1})\, U_{i,j+1}$$

$$+ \lambda k\, \phi_0(x_i, t_j) + \lambda k\, \phi_1(x_i, t_j)\, U_{i,j}$$

$$\Rightarrow -\lambda r U_{i-1,j+1} + \left(1 + 2\lambda r - \lambda k \phi_1(x_i, t_{j+1})\right) U_{i,j+1} - \lambda r U_{i+1,j+1}$$

$$= (1-\lambda) r U_{i-1,j} + \left(1 - 2(1-\lambda)r + \lambda k \phi_1(x_i,t_j)\right) U_{i,j} + (1-\lambda) r U_{i+1,j}$$
$$+ \lambda k\, \phi_0(x_i, t_{j+1}) + \lambda k\, \phi_0(x_i, t_j)$$

Las condiciones de frontera son:

$U_{0,j} = f(t_j)$, $U_{M,j} = g(t_j)$, por lo que ya no es necesario calcularlos.

Sea $V_j = \begin{bmatrix} U_{1,j} \\ \vdots \\ U_{M-1,j} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A_{j+1} V_{j+1} = B V_j + \vec{R}_j ,$$

donde:

$$A_{j+1} = \begin{bmatrix} 1+2\lambda r-\lambda k\phi_1(x_1,t_{j+1}) & -\lambda r & & & \\ -\lambda r & 1+2\lambda r-\lambda k\phi_1(x_2,t_{j+1}) & -\lambda r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\lambda r & 1+2\lambda r-\lambda k\phi_1(x_{M-2},t_{j+1}) & -\lambda r \\ & & & -\lambda r & 1+2\lambda r-\lambda k\phi_1(x_{M-1},t_{j+1}) \end{bmatrix}$$

$$B_j = \begin{bmatrix} 1-2(1-\lambda)r+\lambda k\phi_1(x_1,t_j) & (1-\lambda)r & & & \\ (1-\lambda)r & 1-2(1-\lambda)r+\lambda k\phi_1(x_2,t_j) & (1-\lambda)r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & (1-\lambda)r & 1-2(1-\lambda)r+\lambda k\phi_1(x_{M-2},t_j) & (1-\lambda)r \\ & & & (1-\lambda)r & 1-2(1-\lambda)r+\lambda k\phi_1(x_M,t_j) \end{bmatrix}$$

$$\vec{R}_j = \begin{bmatrix} \lambda r f(t_{j+1}) + (1-\lambda) r f(t_j) + \lambda k\phi_0(x_1,t_{j+1}) + \lambda k\phi_0(x_1,t_j) \\ \vdots \\ \lambda k\phi_0(x_i,t_{i+1}) + \lambda k\phi_0(x_i,t_j) \\ \vdots \\ \lambda r g(t_{j+1}) + (1-\lambda) r g(t_j) + \lambda k\phi_0(x_{M-1},t_{j+1}) + \lambda k\phi_0(x_{M-1},t_j) \end{bmatrix}$$

Se puede aplicar el algoritmo de Thomas en este caso.

Otra manera más directa es discretizar $\phi$ de manera explícita:

$$\frac{U_{i,j+1}-U_{i,j}}{k} = \lambda \frac{1}{\Delta x^2}\left(U_{i-1,j+1}-2U_{i,j+1}+U_{i+1,j+1}\right)+(1-\lambda)\frac{1}{\Delta x^2}\left(U_{i-1,j}-2U_{i,j}+U_{i+1,j}\right)$$

$$+ \phi(x_i, t_j, U_{i,j})$$

Este caso funciona aún si $\phi$ es no-lineal con respecto a $u$.

En este caso:

$$A V_{j+1} = B V_j + \vec{R}_j$$

$$A = \begin{bmatrix} 1+2\lambda r & -\lambda r & & & \\ -\lambda r & 1+2\lambda r & -\lambda r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\lambda r & 1+2\lambda r & -\lambda r \\ & & & -\lambda r & 1+2\lambda r \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1-2(1-\lambda)r & (1-\lambda)r & & & \\ (1-\lambda)r & 1-2(1-\lambda)r & (1-\lambda)r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & (1-\lambda)r & 1-2(1-\lambda)r & (1-\lambda)r \\ & & & (1-\lambda)r & 1-2(1-\lambda)r \end{bmatrix}$$

$$\vec{R}_j = \begin{bmatrix} \lambda r f(t_{j+1}) + (1-\lambda) r f(t_j) + k\phi(x_1, t_j, U_{i,j}) \\ \vdots \\ \lambda k \phi_0(x_i, t_{i+1}) + k\phi_0(x_i, t_j) \\ \vdots \\ \lambda r g(t_{j+1}) + (1-\lambda) r g(t_j) + k\phi(x_{M-1}, t_j, U_{i,j}) \end{bmatrix}$$

Se puede aplicar el algoritmo de Thomas en este caso.

# Problema 2:

$$u_t = u_{xx}, \quad 0<x<1$$
$$u(0,t) = e^{-t}, \quad \partial_x u(1,t) = 0$$

En el interior, el algoritmo es:

$$-r\lambda U_{i-1,j+1} + (1+2r\lambda)U_{i,j+1} - r\lambda U_{i+1,j+1} \qquad i = 2,\dots,M-1$$
$$= r(1-\lambda)U_{i-1,j} + [1-2r(1-\lambda)]U_{i,j} + r(1-\lambda)U_{i+1,j}.$$

Para $i=1$, usamos $U_{0,j} = e^{-t_j}$ y obtenemos:

$$(1+2r\lambda)U_{1,j+1} - r\lambda U_{2,j+1}$$
$$= [1-2r(1-\lambda)]U_{1,j} + r(1-\lambda)U_{2,j} + r\lambda e^{-t_{j+1}} + r(1-\lambda)e^{-t_j}.$$

Para $i=M$, usamos $U_{M+1,j} = U_{M-1,j}$

$$\Rightarrow -2r\lambda U_{M-1,j+1} + (1+2r\lambda)U_{M,j+1}$$
$$= 2r(1-\lambda)U_{M-1,j} + [1-2r(1-\lambda)]U_{M,j}.$$

$\Rightarrow AV_{j+1} = BV_j + \vec{R}_j$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1+2\lambda r & -\lambda r & & & \\ -\lambda r & 1+2\lambda r & -\lambda r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\lambda r & 1+2\lambda r & -\lambda r \\ & & & -2r\lambda & 1+2\lambda r \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1-2(1-\lambda)r & (1-\lambda)r & & & \\ (1-\lambda)r & 1-2(1-\lambda)r & (1-\lambda)r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & (1-\lambda)r & 1-2(1-\lambda)r & (1-\lambda)r \\ & & & 2(1-\lambda)r & 1-2(1-\lambda)r \end{bmatrix}$$

$$\vec{R}_j = \begin{bmatrix} r\lambda e^{-t_{j+1}} + r(1-\lambda)e^{-t_j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

# Problema 3:

$u_t = u_{xx} + u_x + u$

Método explícito basado en diferencias centradas:

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} = \frac{1}{h^2}\left[U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}\right] + \frac{1}{2h}\left[U_{i+1,j} - U_{i-1,j}\right] + U_{i,j}$$

$$\Rightarrow U_{i,j+1} = U_{i,j} + r\left[U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}\right] + \frac{s}{2}\left[U_{i+1,j} - U_{i-1,j}\right] + kU_{i,j}$$

donde $r = \frac{k}{h^2}$, $s = \frac{k}{h}$

$$\Rightarrow U_{i,j+1} = \left(r + \frac{s}{2}\right)U_{i+1,j} + (1 - 2r + k)U_{i,j} + \left(r - \frac{s}{2}\right)U_{i-1,j}$$

Análisis de estabilidad de Fourier:

$$U_{i,j} = \mu^j e^{\sqrt{-1}\,\lambda i h}$$

$$\Rightarrow e^{\sqrt{-1}} e^{\lambda i h} \mu^{j+1} = \left(r + \frac{s}{2}\right) e^{\sqrt{-1}\,\lambda(i+1)h} \mu^j + (1 - 2r + k) e^{\sqrt{-1}\,\lambda i h} \mu^j$$

$$+ \left(r - \frac{s}{2}\right) e^{\sqrt{-1}\,\lambda(i-1)h} \mu^j$$

$$\Rightarrow \mu = \left(r + \frac{s}{2}\right) e^{\sqrt{-1}\,\lambda h} + (1 - 2r + k) + \left(r - \frac{s}{2}\right) e^{-\sqrt{-1}\,\lambda h}$$

$$= r\,2\cos(\lambda h) + \frac{s}{2} 2\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}(\lambda h) + 1 - 2r + k$$

$$= 1 - 2r + k + 2r\cos(\lambda h) + \sqrt{-1}\, s\,\mathrm{sen}(\lambda h)$$

Para $\lambda h = 0$, tenemos:

$$\mu = 1 + \kappa > 1$$

$\therefore$ El método es incondicionalmente inestable.

Esto es consistente con la ecuación por el término $+u$.

Las soluciones a la ecuacion $u_t = u$ crecen exponencialmente.