SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES
(MÉTODOS EN DIFERENCIAS FINITAS)
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM
SEMESTRE 2022 - 1
SOLUCIÓN A LA TAREA 3

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Miércoles, 8 de septiembre, 2021.

Antes de las 4:40 PM 100%

Después de las 4:40 PM y hasta las 12 PM 80%

Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Resuelve numéricamente

$$\begin{cases} u_t = \partial_x^2 u, 0 \le x \le 1 \\ \\ u(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le x \le \frac{1}{3} \\ \\ 1 & \text{si} \quad \frac{1}{3} < x \le \frac{2}{3} \\ \\ x - 2/3 & \text{si} \quad \frac{2}{3} < x \le 1. \end{cases} \\ \\ u(0,t) = 0, \partial_x u(1,t) = 1 \text{ para todo } t > 0. \end{cases}$$

Usa el método numérico

$$\begin{cases} (1+2\lambda r)U_{1,j+1} - r\lambda U_{2,j+1} = [1-2r(1-\lambda)]U_{1,j} + r(1-\lambda)U_{2,j}, & i = 1, \\ \\ -r\lambda U_{i-1,j+1} + (1+2r\lambda)U_{i,j+1} - r\lambda U_{i+1,j+1} = r(1-\lambda)U_{i-1,j} + [1-2r(1-\lambda)]U_{i,j} + r(1-\lambda)U_{i+1,j}, & 2 \le i \le M-1, \\ \\ -2r\lambda U_{M-1,j+1} + (1+2r\lambda)U_{M,j+1} = 2r(1-\lambda)U_{M-1,j} + [1-2r(1-\lambda)]U_{M,j} + 2hr, & i = M, \end{cases}$$

- Usa una malla con $N = 100$ puntos con $\lambda = 0, \frac{1}{2}, r = 0.45, 0.55$. Muestra la gráfica de la solución para $t = 0.0001, 0.001, 1$. En total deben ser 4 simulaciones a 3 diferentes tiempos, dando 12 gráficas. Describe tus observaciones. Usa el algoritmo de Thomas para invertir la matriz.
- Calcula el límite $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$.

Solución:

El código va adjunto.

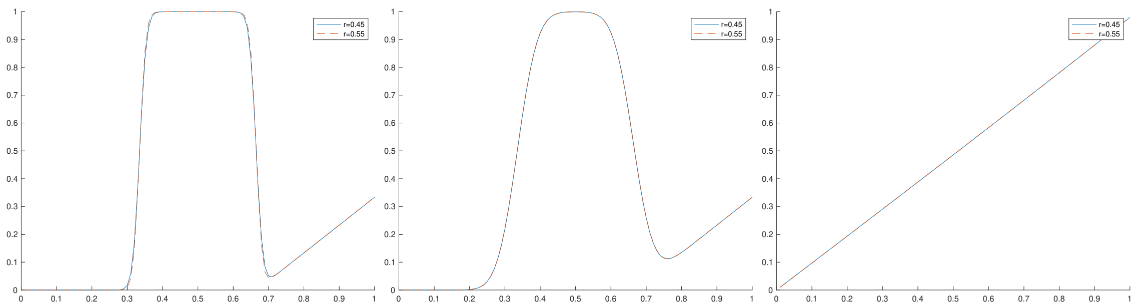

FIGURE 1. Resultados dados por Cranck-Nicolson ($\lambda = 0.5$). En cada figura se muestran los resultados con $r = 0.45$ y $r = 0.55$. El panel izquierdo muestra la solución a tiempo $t = 0.0001$, el panel central muestra la solución a tiempo $t = 0.001$ y el tiempo $t = 1$ se muestra en el panel de la derecha.

Los resultados dados por Cranck-Nicolson se muestran en la figura 1. Podemos ver que el método es estable aún cuando $r > 1/2$. La comparación es casi indistinguible except a tiempos muy cortos ($t = 0.0001$).

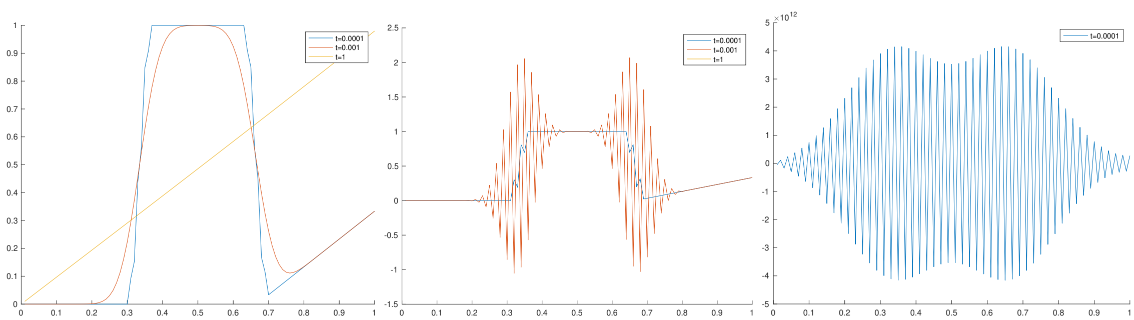

FIGURE 2. Resultados dados por el método explícito ($\lambda = 0$). El panel de la izquierda y el central muestran los resultados a diferentes tiempos $t = 0.0001, t = 0.001$ y $t = 1$. El panel izquierdo corresponde a $r = 0.45$ mientras que el central se calculó con $r = 0.55$. El panel de la derecha muestra la aproximación numérica a tiempo $t = 0.01$ con $r = 0.45$.

Los resultados dados por el método explícito se muestran en la figura 2. Como podemos ver, los resultados son estables para $r = 0.45$ pero inestables para $r = 0.55$, conforme a lo esperado. La solución numérica a tiempo $t = 1$ con $r = 0.45$ creció tanto que arrojó NaNs. El panel de la derecha muestra la solución numérica inestable a tiempo $t = .01$.

Por último, la solución límite $u_\infty(x) = \lim_{t\to\infty} u(x,t)$ solo depende de x, por lo que debe satisfacer $\partial_{xx} u_\infty = 0$. Esto nos da una solución lineal en x. Aplicando las condiciones de frontera, veremos que la solución límite debe ser la solución lineal

$$u_\infty(x) = x, 0 \le x \le 1.$$