SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES
(MÉTODOS EN DIFERENCIAS FINITAS)
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM
SEMESTRE 2022 - 1
TAREA 2

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Lunes, 30 de agosto, 2021.

Antes de las 4:40 PM 100%

Después de las 4:40 PM y hasta las 12 PM 80%

Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Considera la ecuación en diferencias finitas

$$U_{i,j+1} = rU_{i-1,j} + (1-2r)U_{i,j} + rU_{i+1,j}, \quad i = 1, \ldots, M-1.$$

Busca soluciones numéricas de la forma $U_{i,j} = X_i T_j$ para verificar que el método de separación de variables se puede aplicar a la ecuación anterior. Muestra las ecuaciones para X_i y T_j.

Problema 2: Obtén soluciones de las ecuaciones para X_i y T_j del problema anterior. Escribe $X_i = e^{\lambda i}$, y determina dos valores de λ, digamos λ_1 y λ_2. La solución para X_i se obtiene entonces por superposición como $X_i = C_1 e^{i\lambda_1} + C_2 e^{i\lambda_2}$, donde C_1 y C_2 son constantes.

Problema 3: Encuentra un método numérico explícito *similar* al del problema 1, pero para la ecuación

$$u_t = u_{xx} + u_x.$$

Aplica el análisis de estabilidad de Fourier para dicho método.

Problema 1:

$$U_{i,j+1} = rU_{i-1,j} + (1-2r)U_{i,j} + rU_{i+1,j}$$

$$U_{i,j} = X_i T_j$$

$$\Rightarrow X_i T_{j+1} = r X_{i-1} T_j + (1-2r) X_i T_j + r X_{i+1} T_j$$

$$\Rightarrow \frac{T_{j+1}}{T_j} = \frac{r X_{i-1} + (1-2r) X_i + r X_{i+1}}{X_i} = C = cte.$$

$$\Rightarrow T_{j+1} = c T_j \Rightarrow T_j = c^j T_0$$

$$r X_{i-1} + (1-2r) X_i + r X_{i+1} = c X_i$$

Problema 2:

$$X_i = e^{\lambda i}$$

$$\Rightarrow r e^{\lambda(i-1)} + (1-2r) e^{\lambda i} + r e^{\lambda(i+1)} = c e^{\lambda i}$$

$$\Rightarrow r e^{-\lambda} + (1-2r) + r e^{\lambda} = c$$

$$\Rightarrow r (e^{\lambda})^2 + (1-2r-c) e^{\lambda} + r = 0$$

$$\Rightarrow e^{\lambda} = \frac{c-1+2r \pm \sqrt{(c-1+2r)^2 - 4r^2}}{2r}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \log\left(\frac{c-1+2r \pm \sqrt{(c-1)(c-1+4r)}}{2r}\right).$$

Problema 3:

Forward Euler

Backward Euler: $\frac{U_{i,j}-U_{i,j-1}}{k}$

regularizador/suavizador

método inestable

$u_t = u_{xx} + u_x$

Método explícito:

$= \partial_x u + O(h^2)$

$$\frac{U_{i,j+1}-U_{i,j}}{k} = \frac{1}{h^2}\left(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}\right) + \frac{1}{2h}\left(U_{i+1,j} - U_{i-1,j}\right)$$

$$\Rightarrow U_{i,j+1} = U_{i,j} + r\left(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}\right) + \frac{s}{2}\left(U_{i+1,j} - U_{i-1,j}\right)$$

donde $r = \frac{k}{h^2}$, $s = \frac{k}{h}$

$$\Rightarrow U_{i,j+1} = \left(r + \tfrac{s}{2}\right)U_{i+1,j} + (1-2r)U_{i,j} + \left(r - \tfrac{s}{2}\right)U_{i-1,j}$$

Análisis de estabilidad de Fourier:

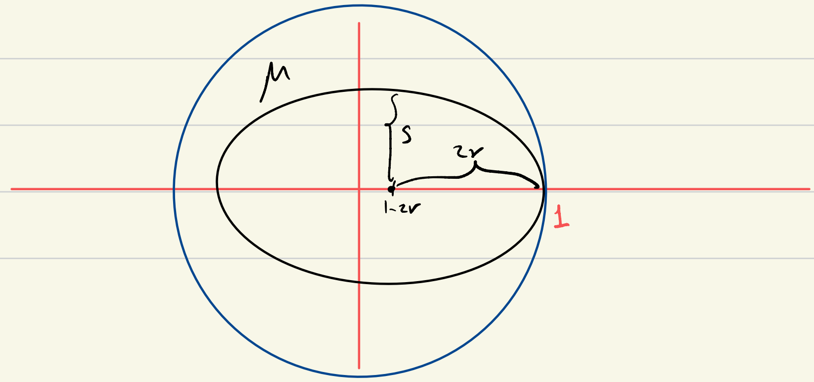
$\cos(\lambda h) + i\,\mathrm{sen}(\lambda h)$ $\qquad$ $\cos(\lambda h) - i\,\mathrm{sen}(\lambda h)$

$$U_{i,j} = \mu^j e^{\sqrt{-1}\, i \lambda h}$$

$$\Rightarrow \mu^{j+1} e^{\sqrt{-1}\, i\lambda h} = \mu^j e^{\sqrt{-1}\, i \lambda h}\left[\left(r+\tfrac{s}{2}\right)e^{\sqrt{-1}\,\lambda h} + (1-2r) + \left(r - \tfrac{s}{2}\right)e^{-\sqrt{-1}\,\lambda h}\right]$$

$$\Rightarrow \mu = r\, 2\cos(\lambda h) + \frac{s}{2}\left(2\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}(\lambda h)\right) + 1 - 2r$$
$$= 1 - 2r + 2r\cos(\lambda h) + \sqrt{-1}\, s\, \mathrm{sen}(\lambda h) \longrightarrow (1-2r, 0) + \left(2r\cos(\lambda h), s\,\mathrm{sen}(\lambda h)\right)$$

Esto parametriza un elipse con centro en $(1-2r, 0)$ y radios $2r$, s



El cuadrado de la norma de μ es:

$$|\mu|^2 = (1-2r+2r\cos(\lambda h))^2 + s^2 \operatorname{sen}^2(\lambda h).$$

Una manera conveniente de reescribir la expresión anterior es:

$$|\mu|^2 = (1-2r)^2 + s^2 + (4r^2-s^2)\cos^2(\lambda h) + 4(1-2r)r$$

$$= (1-2r)^2 + s^2 + (4r^2-s^2)x^2 + 4(1-2r)r\,x, \quad x=\cos(\lambda h)\in[-1,1].$$

Para r, s fijos, la función

$$f(x) = (4r^2-s^2)x^2 + 4(1-2r)r\,x$$

es una función cuadrática si $4r^2-s^2 \neq 0$.

$$f'(x) = 2(4r^2-s^2)x + 4(1-2r)r$$

El punto singular de f ocurre en el punto

$$x = \frac{-4(1-2r)r}{2(4r^2-s^2)} = \frac{-2(1-2r)r}{4r^2-s^2} = \frac{4r^2-2r}{4r^2-s^2}.$$

Dependiendo de si f es concava hacia abajo ó hacia arriba, el máximo de f en el intervalo puede ocurrir ya sea en el punto singular

$x_m = \dfrac{4r^2-2r}{4r^2-s^2}$, o en los extremos $x = \pm 1$.

Al evaluar la expresión para $|\mu|^2$ en esos tres puntos, tenemos que:

$$(1-2r)^2+s^2+f(-1) = (1-4r)^2$$

$$(1-2r)^2+s^2+f(1) = 1$$

$$(1-2r)^2+s^2+f(x_m) = \frac{s^2(1-4r+s^2)}{-4r^2+s^2}$$

Por tanto, una condición suficiente para la estabilidad es:

$$(1-4r)^2 \leq 1 \qquad \frac{s^2|1-4r+s^2|}{|4r^2-s^2|} \leq 1$$

$$\Leftarrow) \quad r \leq \frac{1}{2}, \quad s^2|1-4r+s^2| \leq |4r^2-s^2|.$$