SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES
(MÉTODOS EN DIFERENCIAS FINITAS)
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM
SEMESTRE 2022 - 1
TAREA 1

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Lunes, 23 de agosto, 2021.
Antes de las 4:40 PM 100%
Después de las 4:40 PM y hasta las 12 PM 80%
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: En forma adimensional la ecuación "threadline" (vibraciones de cuerdas) de Swope and Ames es

$$y_{tt} + \alpha\, y_{xt} + \frac{1}{4}(\alpha^2 - 4)y_{xx} = 0,$$

donde $\alpha = 2v/c$. Encuentra las características de esta ecuación y clasifícala.

Problema 2: La ecuación de un flujo isentrópico en dimensión 1 de un gas perfecto se gobierna por las ecuaciones de momento, continuidad, y una ley de gases dada por

$$\begin{array}{lcl} u_t + uu_x + \rho^{-1}p_x & = & 0, \\ \rho_t + \rho u_x + u\rho_x & = & 0, \\ p\rho^{-\gamma} = \alpha & = & \text{constante }, c^2 = \frac{dp}{d\rho}, \end{array}$$

en donde x es la variable espacial, t el tiempo, $u(x,t)$, $p(x,t)$ y $\rho(x,t)$ son la velocidad, presión, y densidad respectivamente. La velocidad del sonido en el gas está dada por c. La razón de calores específicos γ es constante.

(a) Elimina la presión y escribe las dos ecuaciones para u y ρ.
(b) Encuentra las características del sistema y clasifícalo.

Problema 3: Flujos transónicos casi uniformes de un gas real se ha examinado por Tomotika y Tamada con la ecuación

$$w_{\psi\psi} = k[w^2]_{\phi\phi}, k > 0.$$

Encuentra las características y clasifica la ecuación.

Problema 1:

$$y_{tt} + \alpha y_{xt} + \frac{1}{4}(\alpha^2 - 4)\, y_{xx} = 0$$

$$d(y_t) = y_{xt}\, dx + y_{tt}\, dt$$

$$d(y_x) = y_{xx}\, dx + y_{xt}\, dt$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\alpha^2-4) & \alpha & 1 \\ 0 & dx & dt \\ dx & dt & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{xx} \\ y_{xt} \\ y_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d(y_t) \\ d(y_x) \end{pmatrix}$$

El determinante es:

$$\frac{1}{4}(\alpha^2 - 4)(-dt^2) - \alpha(-dx\, dt) - dx^2$$

Las características están dadas por:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \alpha \frac{dx}{dt} + \frac{1}{4}(\alpha^2 - 4) = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}(\alpha^2 - 4)}}{2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{\alpha}{2} \pm 1$$

$\therefore$ La ecuación es hiperbólica y las curvas características están dadas por la ecuación anterior.

Problema 2:

$$u_t + u u_x + \frac{1}{\rho} p_x = 0$$

$$\rho_t + \rho u_x + u \rho_x = 0$$

$$p/\rho^\gamma = \alpha = cte$$

(a) $p = \alpha \rho^\gamma \Rightarrow \frac{1}{\rho} p_x = \frac{1}{\rho} \alpha \gamma \rho^{\gamma-1} \rho_x = \alpha \gamma \rho^{\gamma-2} \rho_x$

$$= \partial_x \left(\alpha \gamma \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \right)_x$$

$$\Rightarrow \quad u_t + \partial_x \left(\frac{1}{2} u^2 + \alpha \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} \right) = 0$$

$$\rho_t + \partial_x (\rho u) = 0$$

ó

$$\begin{cases} u_t + u u_x + \alpha \gamma \rho^{\gamma-2} \rho_x = 0 \\ \rho_t + \rho u_x + u \rho_x = 0 \end{cases}$$

$$d(u) = u_x \, dx + u_t \, dt$$

$$d(\rho) = \rho_x \, dx + \rho_t \, dt$$

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \alpha\gamma\rho^{\gamma-1}$$

$$\begin{pmatrix} u & \alpha\gamma\rho^{\gamma-2} & 1 & 0 \\ \rho & u & 0 & 1 \\ dx & 0 & dt & 0 \\ 0 & dx & 0 & dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ \rho_x \\ u_t \\ \rho_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ du \\ d\rho \end{pmatrix}$$

El determinante es:

$$u \begin{vmatrix} u & 0 & 1 \\ 0 & dt & 0 \\ dx & 0 & dt \end{vmatrix} - \alpha\gamma\rho^{\gamma-2} \begin{vmatrix} \rho & 0 & 1 \\ dx & dt & 0 \\ 0 & 0 & dt \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \rho & u & 1 \\ dx & 0 & 0 \\ 0 & dx & dt \end{vmatrix}$$

$$= u\left[u\,dt^2 - dx\,dt\right] - \alpha\gamma\rho^{\gamma-2}\left[\rho\,dt^2\right] + \left[-u\,dx\,dt + dx^2\right]$$

Entonces la curva característica esta dada por:

$$0 = u^2 - u\frac{dx}{dt} - \alpha\gamma\rho^{\gamma-1} - u\frac{dx}{dt} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2u\frac{dx}{dt} + u^2 - c^2 = \left(\frac{dx}{dt} - u\right)^2 - c^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = u \pm c.$$

$\therefore$ El problema es hiperbólico.

Problema 3:

$$w_{\psi\psi} = k\left[w^2\right]_{\phi\phi} \quad , \quad k>0 \quad \Rightarrow w_{\psi\psi} = k\,\partial_\phi\,(2w\,w_\phi)$$

$$= k\,2\,w_\phi w_\phi + k\,2w\,w_{\phi\phi}$$

$$= 2kw\,w_{\phi\phi} + 2k(w_\phi)^2$$

$$d(w_\psi) = w_{\psi\psi}\,d\psi + w_{\psi\phi}\,d\phi$$

$$d(w_\phi) = w_{\psi\phi}\,d\psi + w_{\phi\phi}\,d\phi$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2kw \\ d\psi & d\phi & 0 \\ 0 & d\psi & d\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{\psi\psi} \\ w_{\psi\phi} \\ w_{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k(w_\phi)^2 \\ d(w_\psi) \\ d(w_\phi) \end{pmatrix}$$

El determinante es:

$$(d\phi)^2 - 2kw\,(d\psi)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\phi}{d\psi}\right)^2 = 2kw$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{d\psi} = \pm\sqrt{2kw}$$

$\therefore$ El problema es hiperbólico si $w>0$,
elíptico si $w<0$
parabólico si $w=0$.