SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (MÉTODOS EN DIFERENCIAS FINITAS) POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM SEMESTRE 2022 - 1 TAREA 13 - SOLUCIÓN

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Viernes, 3 de diciembre, 2021.
Antes de las 4:40 PM 100%
Después de las 4:40 PM y hasta las 11:59 PM 80%
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1 : Considera la ecuación de Burgers viscosa con condiciones Dirichlet:

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{1}{2}u^2\right) & = & \epsilon u_{xx}, & -3 \leq x \leq 3 \\ u(x,0) & = & \begin{cases} 0, & \text{if} \quad x \leq -1 \\ -1-x & \text{if} \quad -1 < x \leq 0 \\ -1+x, & \text{if} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{if} \quad 1 < x. \end{cases} \\ u(-3,t) = u(3,t) = 0. & & \text{Condición de frontera Dirichlet} \end{cases}$$

Usando la transformada de Cole-Hopf, resuelve el problema anterior. Considera valores de ϵ decrecientes y comenta que observas cuando $\epsilon \to 0$. Específicamente,

(a) Aproxima numéricamente la solución a tiempo $t = 0.5, 1$, y para cada tiempo, considera dos valores del coeficiente de viscosidad $\epsilon = 0.005, 0.02$. Sin viscosidad, las curvas características nos da una solución exacta para tiempos $t \leq 1$ cuando las curvas se intersecan por primera vez, para la condición inicial dada arriba. Para cada tiempo, grafica tanto la solución exacta como la aproximada.

(b) La solución viscosa se puede calcular para tiempos post-choque $t \geq 1$. Aproxima la solución a tiempo $t = 2$ para $\epsilon = 0.005, 0.02$. Que observas para el valor más chico de ϵ? Grafica las dos soluciones. Puedes conjeturar a que converge la solución cuando $\epsilon \to 0$ a tiempo $t = 2$?

Sugerencia para la solución numérica:

- Dada la condición inicial $u_o(x)$, aplica la transformada Cole-Hopf
$$\varphi_o(x) = \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon}\int_{x_o}^{x} u_o(s)dz\right).$$
- Resuelve la ecuación del calor $\varphi_t = \epsilon\varphi_{xx}$ con la condición inicial $\varphi_o(x)$.
Nota: Debes resolver la ecuación del calor para φ con el esquema numérico
$$\varphi_j^{(n+1)} = \varphi_n + \frac{\epsilon\Delta t}{\Delta x^2}\left(\varphi_{j-1}^{(n)} - 2\varphi_j^{(n)} + \varphi_{j+1}^{(n)}\right).$$
Usa condiciones Neumann $\partial_x\varphi(-3,t) = \partial_x\varphi(3,t) = 0$. En el código, las condiciones periódicas se leen $\varphi(0) = \varphi(N), \varphi(N+1) = \varphi(1)$. Para condiciones Neumann en φ, debes usar $\varphi(0) = \varphi(1), \varphi(N+1) = \varphi(N)$.
- Vuelve a la ecuación de Burgers viscosa mediante la transformada inversa $u = -2\epsilon\varphi_x/\varphi$.

Respuesta a parte a):

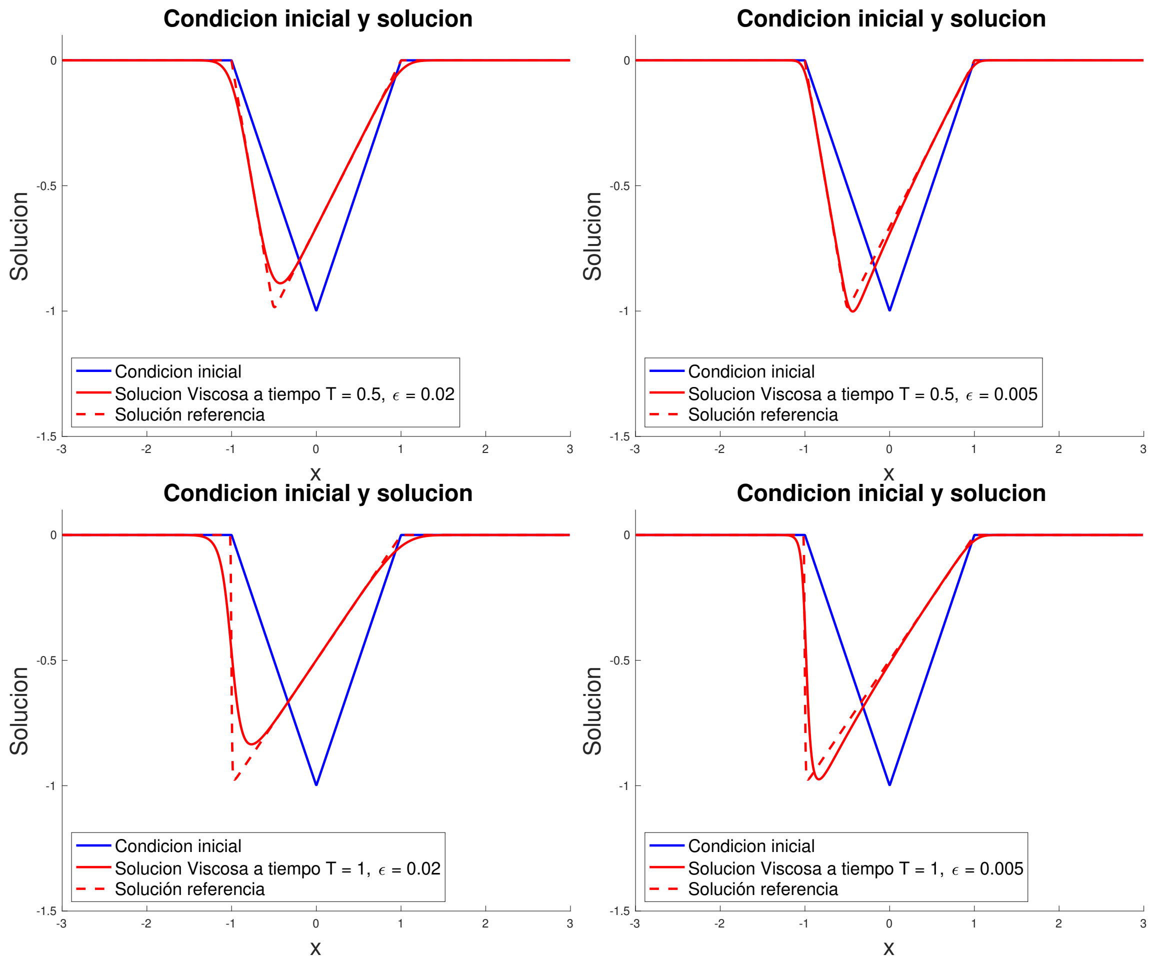

FIGURE 1. Se muestran las condiciones iniciales, la solución numérica y una solución referencia a distintos tiempos y valores de ϵ.

Las soluciones numéricas a tiempos $t = 0.5$ y $t = 1$, $\epsilon = 0.005$ y $\epsilon = 0.02$ se muestran en la figura 1. También se muestra una solución referencia que funciona para la solución sin viscosidad. En lugar de eso, pueden poner la solución exacta dada por el método de las curvas características. Como podemos ver, entre más chico es ϵ, más se parece a la solución sin viscosidad. La solución a tiempo $t = 1$ es justo cuando se forma la discontinuidad.

Respuesta a parte b):

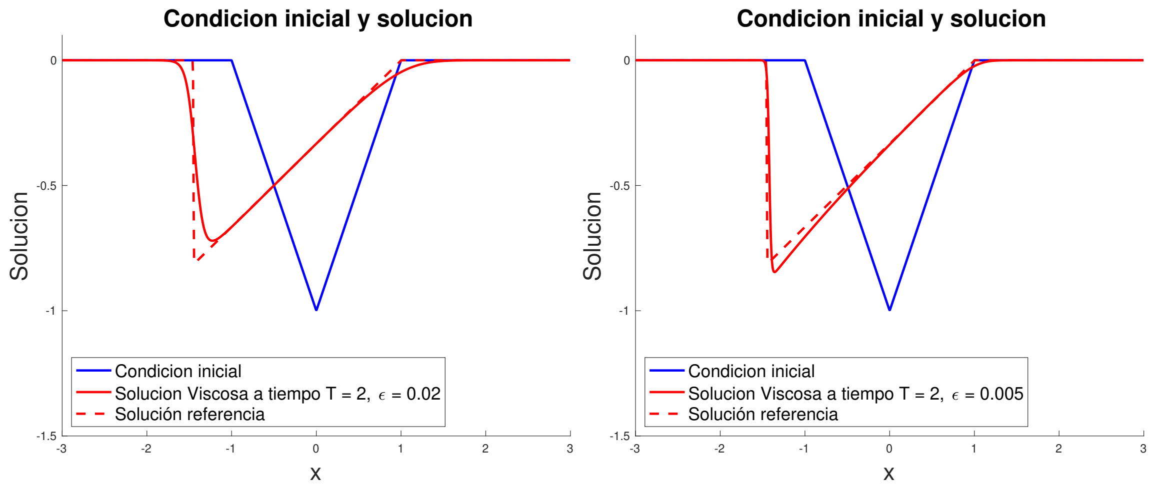

FIGURE 2. Se muestra la solución viscosa a tiempos post-choque para $\epsilon = 0.005, 0.02$.

La solución viscosa a tiempos post-choque se puede calcular con la estrategia de la transformada de Cole-Hopf. Se muestra en la figura 2. Se ve además que cuando ϵ es pequeño, la solución se acerca a la discontinua dada por la solución referencia.

Problema 2 : Resuelve numéricamente el problema

$$\begin{cases} \rho_t + a\rho_x = 0, \\ \rho(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad -L \le x < 0 \\ 0 & \text{if} \quad 0 \le x \le L \end{cases} \end{cases}$$

con $a = 1, L = 1, t = 1/2$, con condiciones de frontera Neumann, y usando los siguientes esquemas numéricos

- Esquema 1:
$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\left(\rho_{j+1}^n - \rho_j^n\right).$$
- Esquema 2:
$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\left(\rho_j^n - \rho_{j-1}^n\right).$$

Usa la condición CFL $\quad a\Delta t/\Delta x \le 1$. Reporta lo que observas.

Respuesta a problema 2:

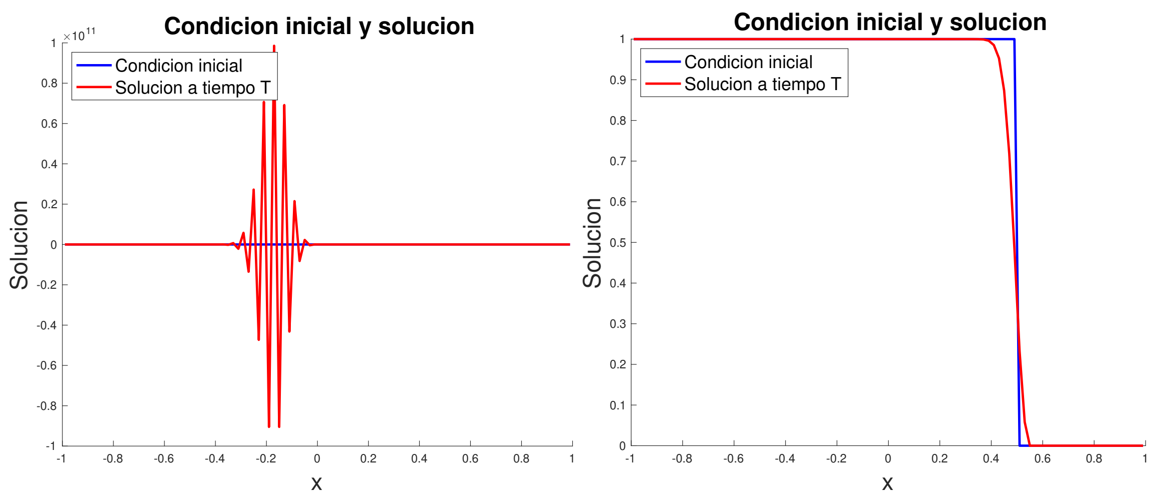

FIGURE 3. izquierda: Solución dada por el esquema 1. Derecha: Solución dada por el esquema 2.

Las soluciones se muestran en la figura 3. Como podemos ver, el segundo esquema es estable. El primero siempre es inestable en este caso ($a01 > 0$)). Esto es consistente con lo visto en clase en cuanto a la estabilidad de estos métodos aplicados a la ecuación de transporte.