SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES
(MÉTODOS EN DIFERENCIAS FINITAS)
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM
SEMESTRE 2022 - 1
TAREA 12

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Lunes, 29 de noviembre, 2021.
Antes de las 4:40 PM 100%
Después de las 4:40 PM y hasta las 12 PM 80%
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1 : Usando el método de las características, resuelve el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t - x^3 u_x &= 0, \qquad -\infty < x < \infty \\ \\ u(x,t=0) &= u_o(x), \end{cases}$$

donde $u_o(x)$ es una función suave. Demuestra que esta ecuación diferencial parcial no genera ondas de choque, mostrando que las curvas características no se intersecan.

Problema 2 : Considera la ecuación hiperbólica escalar

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{1}{2}u^2\right) = 0, -\infty < x < \infty,$$

conocida como ecuación de Burgers.

a) Usa el método de las características para resolver la ecuación de Burgers con condiciones iniciales:
$$u(x,t=0) = \text{sign}(x)x^2 = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$
y encuentra la formula explícita de la solución.

b) Considera ahora la condición inicial $u(x,t=0) = x^2$. Puedes encontrar una solución para todo tiempo t? Encuéntrala.

[redacted] [redacted]

Problema 1: Usando el método de las características, resuelve el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t - x^3 u_x = 0, & -\infty < x < \infty \\ u(x, t=0) = u_0(x), \end{cases}$$ ← **Problema lineal.**

donde $u_0(x)$ es una función suave. Demuestra que esta ecuación diferencial parcial no genera ondas de choque, mostrando que las curvas características no se intersectan.

Respuesta: Curvas características:

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 \Rightarrow x^{-3}dx = -dt \Rightarrow \frac{x^{-2}}{-2} - \frac{x_0^{-2}}{-2} = -t$$

$$\Rightarrow x^{-2} = x_0^{-2} + 2t \Rightarrow x^2 = \frac{1}{x_0^{-2}+2t} \Rightarrow x = \operatorname{sign}(x_0)\frac{1}{\sqrt{x_0^{-2}+2t}}$$

$$\begin{cases} x(t) = \operatorname{sign}(x_0)\dfrac{1}{\sqrt{x_0^{-2}+2t}} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Considera otra curva $y(t) = \operatorname{sign}(x_1)\dfrac{1}{\sqrt{x_1^{-2}+2t}}$ para otra condición inicial

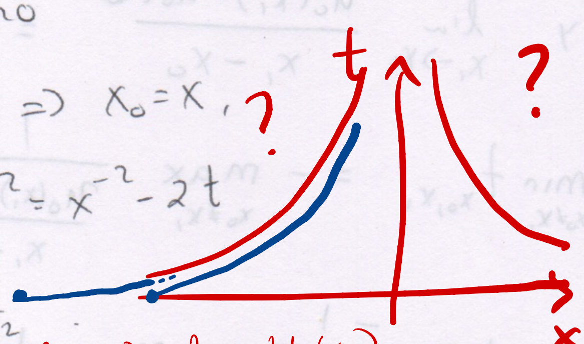
Si $x(t_0) = y(t_0)$ para algún $t_0 > 0$ fijo

$\Rightarrow$ tendrían que ser del mismo signo

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_0^{-2}+2t_0}} = \frac{1}{\sqrt{x_1^{-2}+2t_0}} \Rightarrow x_0^{-2} = x_1^{-2} \Rightarrow x_0 = x_1$$

Podemos incluso despejar x_0: $x_0^{-2} = x^{-2} - 2t$

$$x_0 = \operatorname{sign}(x)\frac{1}{\sqrt{x^{-2}-2t}} \quad \text{para} \quad t < \frac{1}{2x^2}$$



Supongamos que $u_0(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} u_0(x)$

Para $x \neq 0$, $t > \frac{1}{2x^2}$ no hay curva característica que toque ese punto $\Rightarrow u(x,t) = u_0\left(\operatorname{sign}(x)\dfrac{1}{\sqrt{x^{-2}-2t}}\right)$ para $t < \dfrac{1}{2x^2}$.

Además, notemos que

$$\lim_{t \to \frac{1}{2x^2}^-} u(x,t) = \begin{cases} u_0(+\infty) & \text{si} \quad x > 0 \\ u_0(-\infty) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

entonces por continuidad, la solución se extiende a:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0\left(\text{sign}(x) \dfrac{1}{\sqrt{x^{-2} - 2t}}\right) & \text{si} \quad t < \dfrac{1}{2x^2} \\ u_0(-\infty) & t \geq \dfrac{1}{2x^2}, \quad x < 0 \\ u_0(\infty) & t \geq \dfrac{1}{2x^2}, \quad x > 0 \end{cases}$$

[redacted] [redacted]

Problema 2: Considera la ecuación hiperbólica escalar

$$u_t + \left(\tfrac{1}{2}u^2\right)_x = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

conocida como la ecuación de Burgers.

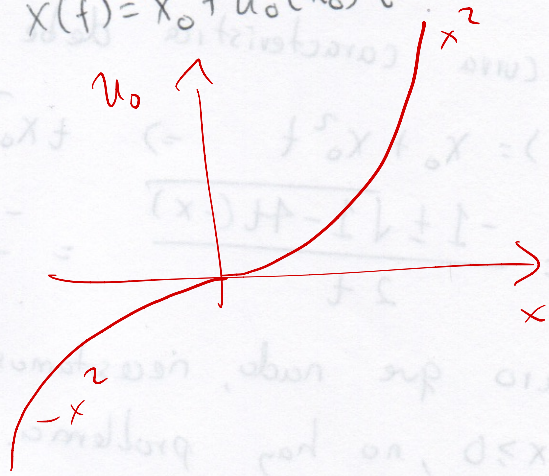
a) Usa el método de las características para resolver la ecuación de Burgers con condiciones iniciales:

$$u(x, t=0) = \text{sign}(x)\, x^2 = \begin{cases} -x^2, & x<0 \\ x^2, & x>0 \end{cases}$$

y encuentra la fórmula explícita de la solución.

R: Curvas características:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u(x(t),t) = u_0(x_0) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad x(t) = x_0 + u_0(x_0)\,t$$



Caso 1: $x_0 < 0 \Rightarrow x(t) = x_0 - x_0^2 t$

Resolver para x_0: $t x_0^2 - x_0 + x = 0$

$$x_0 = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot t\cdot x}}{2t}$$

Como $x_0 < 0$, necesitamos $x_0 = \dfrac{1-\sqrt{1-4xt}}{2t}$

$$1 - \sqrt{1-4xt} \le 0 \iff 1-4xt \geq 1 \iff x \lneq 0.$$

$$\Rightarrow u(x,t) = -x_0^2 = -\left(\frac{1-\sqrt{1-4xt}}{2t}\right)^2 \quad \text{si} \quad t \geq 0,\ x \lneq 0.$$

Caso 2: $x_0 > 0 \Rightarrow x(t) = x_0 + x_0^2 t$

Resolver para x_0: $t x_0^2 + x_0 - x = 0$

$$x_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4t(-x}}{2t}$$

Como $x_0 > 0$, necesitamos $x_0 = \dfrac{-1+\sqrt{1+4xt}}{2t}$

$-1+\sqrt{1+4xt} \geq 0 \Leftarrow$ $1+4xt \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$.

(asumiento $t>0$)

La solución explícita es entonces:

$$\mathcal{U}(x,t) = \begin{cases} -\left(\dfrac{1-\sqrt{1-4xt}}{2t}\right)^2 & \text{si } x \leq 0,\ t \geq 0 \\ \left(\dfrac{1-\sqrt{1+4xt}}{2t}\right)^2 & \text{si } x \geq 0,\ t \geq 0 \end{cases}$$

$$= \operatorname{sign}(x)\left(\frac{1-\sqrt{1+4|x|t}}{2t}\right)^2.$$

(b) Considera ahora la condición inicial $\mathcal{U}(x,t=0)=x^2$.

¿Puedes encontrar la solución para todo tiempo t? Encuéntrala

La curva característica debe ser:

$$X(t) = x_0 + x_0^2 t \quad \Rightarrow \quad t x_0^2 + x_0 - X = 0$$

$$x_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4t(-x)}}{2t} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4xt}}{2t} \qquad \text{y } \mathcal{U}(x,t) = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{1+4xt}}{2t}\right)^2$$

dependiendo del signo $\pm$.

Primero que nada, necesitamos $1+4xt \geq 0$

Si $x \geq 0$, no hay problema.

Si $x<0$, $\Rightarrow t \leq \dfrac{1}{4|x|}$

$\dfrac{1}{|x|}$ puede ser arbitrariamente pequeño.

Siempre tendremos problemas teóricos en esos casos.

$\rightarrow$ Si $1+4xt$, ambos valores de x_0 son válidos

$\Rightarrow$ Tenemos ondas de choque a tiempos arbitrariamente pequeños.

Ej: La ecuación del tráfico:

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0$$
$$u = u_{max}(1-\rho)$$

$$\rho_t + (u_{max}\,\rho(1-\rho))_x = 0$$

ρ = densidad de carros (reescalada)
u_{max} = velocidad máxima

Sea $u_{max} = 0$

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho(1-\rho))_x = 0 \\ \rho(x, t=0) = \rho_0(x) = -x \end{cases}$$

$$(\rho - \rho^2)_x = \rho_x - 2\rho\rho_x$$
$$= (1-2\rho)\rho_x$$

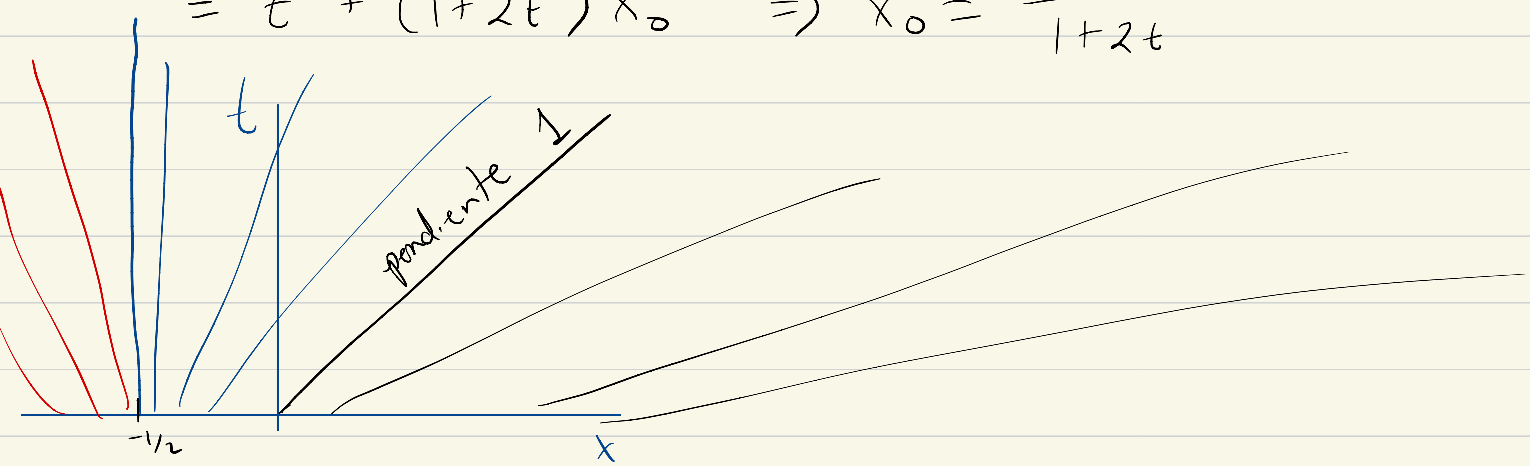
Forma cuasilineal: $\rho_t + (1-2\rho)\rho_x = 0$

Curvas características:

$$\frac{dx}{dt} = 1 - 2\rho(x(t), t) = 1 - 2\rho_0(x_0) = 1 + 2x_0$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + (1+2x_0)t \quad , \quad x_0 = x(t=0)$$

$$= t + (1+2t)x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{x-t}{1+2t}$$



$$\rho(x,t) = \rho_0(x_0) = -x_0 = -\frac{x-t}{1+2t} = \frac{t-x}{1+2t}$$

Caso: $\rho_0(x) = x$ $\qquad\qquad \rho_0(x_0) = x_0$

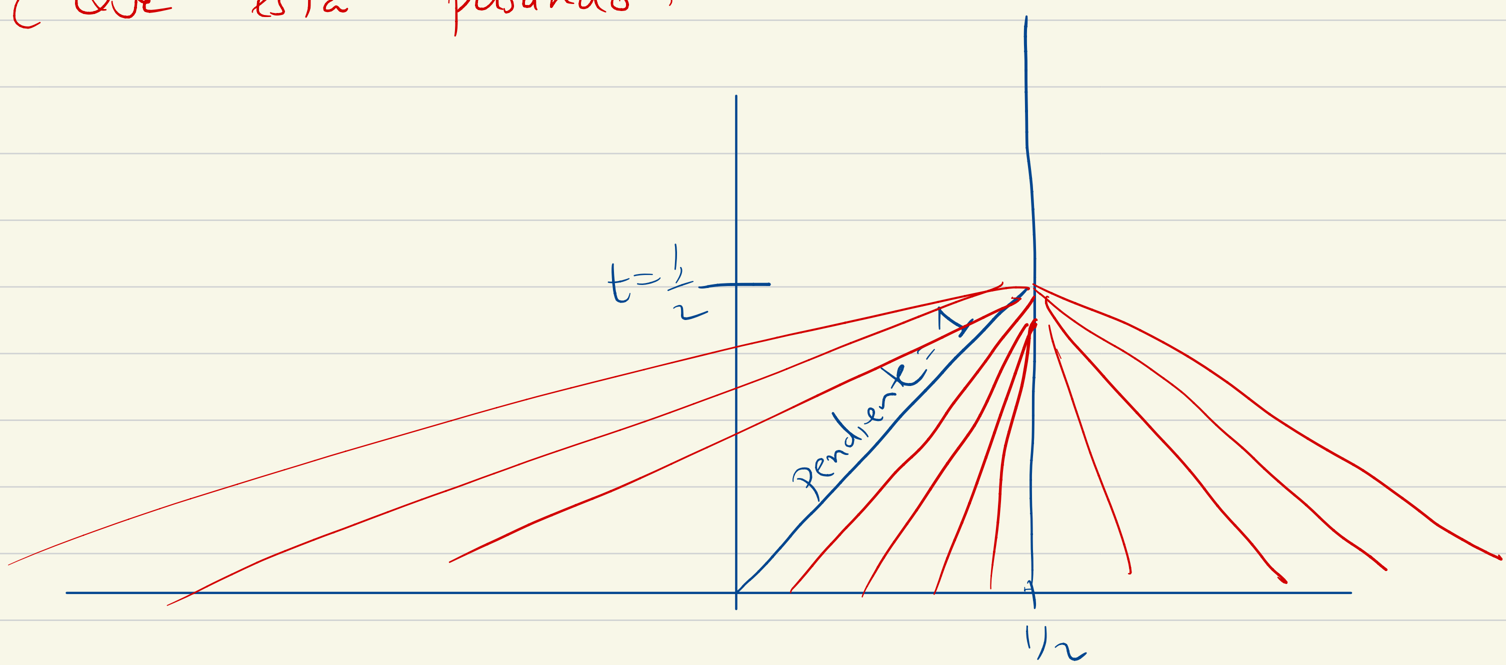
$$\frac{dx}{dt} = 1 - 2\rho_0(x_0) = 1 - 2x_0$$

$$\Rightarrow x = x_0 + (1-2x_0)t$$

$$= t + (1-2t)x_0$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{x-t}{1-2t} \xrightarrow[t \to \frac{1}{2}^-]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } x > \frac{1}{2} \\ -\infty & \text{si } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

¿Que está pasando?



$$x(t=\tfrac{1}{2}) = x_0 + (1-2x_0)\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$