**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES**
**(MÉTODOS EN DIFERENCIAS FINITAS)**
**POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM**
**SEMESTRE 2022 - 1**
**TAREA 11**

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

**Para entregar :** Viernes, 19 de noviembre, 2021.
**Antes de las 4:40 PM** 100%
**Después de las 4:40 PM y hasta las 12 PM** 80%
**Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles**

**Problema 1 :** Considera el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace. Usando el método de gradiente visto en clase $u^{(k)} = u^{(k-1)} + \nu R_{k-1}$, encuentra el mejor valor de $\nu$. ¿Qué método familiar resulta?

**Problema 2 :** Utiliza el método ADI

$$\begin{aligned}
U_{i,j}^{(k+1/2)} &= U_{i,j}^{(k)} + \tfrac{1}{4}\left[U_{i+1,j}^{(k+1/2)} + U_{i-1,j}^{(k+1/2)} - 2\,U_{i,j}^{(k+1/2)}\right] + \tfrac{1}{4}\left[U_{i,j+1}^{(k)} + U_{i,j-1}^{(k)} - 2\,U_{i,j}^{(k)}\right] \\
U_{i,j}^{(k+1)} &= U_{i,j}^{(k+1/2)} + \tfrac{1}{4}\left[U_{i+1,j}^{(k+1/2)} + U_{i-1,j}^{(k+1/2)} - 2\,U_{i,j}^{(k+1/2)}\right] + \tfrac{1}{4}\left[U_{i,j+1}^{(k+1)} + U_{i,j-1}^{(k+1)} - 2\,U_{i,j}^{(k+1)}\right]
\end{aligned}$$

para la ecuación de Laplace en una región rectangular $[0,1]\times[0,1] \ni (x,y)$ con condiciones de frontera

$$u(x,0) = 1, u(x,1) = 2, u(0,y) = 1+y, u(1,y) = 1+y^2.$$

## Problema 1:

Debemos acotar los eigenvalores $\mu_i$ de la matriz asociada:

$$a \le \mu_{p,q} \le b, \qquad 0 < a < b < \infty$$

Sabemos que el valor óptimo de $\nu$ es:

$$\nu = \frac{2}{a+b}.$$

Usando las funciones sinoidales como eigenvectores, sabemos que los eigenvalores son:

$$\mu_{p,q} = \frac{4}{h^2}\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{ph}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{qh}{2}\right)\right], \qquad p,q = 1, \dots, N-1.$$

con $Nh = 2\pi$

$$\Rightarrow \min_{p,q} \mu_{p,q} = \frac{8}{h^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{h}{2}\right) = a$$

$$\max_{p,q} \mu_{p,q} = \frac{8}{h^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{(N-1)h}{2}\right) = b$$

Por simetría, tenemos $a + b = \frac{8}{h^2}$.

$$\Rightarrow \nu = \frac{1}{4}h^2.$$

# Problema 2:

El resultado numérico se muestra a continuación. El código se envía adjunto.