SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (MÉTODOS EN DIFERENCIAS FINITAS)
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM
SEMESTRE 2022 - 1
TAREA 10

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Miércoles, 3 de noviembre, 2021.
Antes de las 4:40 PM 100%
Después de las 4:40 PM y hasta las 12 PM 80%
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1 (Pag. 118 del libro) : Para el problema de Dirichlet de la ecuación de Laplace en el dominio $0 < y < \pi, 0 < x < \pi$, muestra que el radio espectral de la iteración de Gauss-Seidel es $\lambda = \cos^2 h$.

$N \,,\quad h = \frac{\pi}{N} \qquad N_2 = (N-1)^2 \qquad A = A_{N_2 \times N_2}$

$i = 1:N-1, \quad j = 1:N-1 \quad , \quad J(i,j) = (i-1)(N-1) + j$

$A(J(i,j), J(i,j)) = -4$ ← diagonal

$A(J(i,j), J(i+1,j)) = 1 \,, \quad i < N-1$ → arriba

$A(J(i,j), J(i-1,j)) = 1 \,, \quad i > 1$ → abajo

$A(J(i,j), J(i,j+1)) = 1 \,, \quad j < N-1$ → justo arriba

$A(J(i,j), J(i,j-1)) = 1 \,, \quad j > 1$ → justo abajo.

Gauss-Seidel:

$$U^{(k)} = \underbrace{-(R+D)^{-1} S}_{G}\, U^{(k-1)} + (R+D)^{-1} v$$

Buscamos a los e-valores de la matriz G.

$$GU = \lambda U \Rightarrow -(R+D)^{-1} S U = \lambda U \Rightarrow -SU = \lambda (R+D) U$$

$$(\lambda R + \lambda D + S) U = 0$$

$$\Rightarrow \lambda U_{i-1,j} + \lambda U_{i,j-1} - 4\lambda U_{i,j} + U_{i+1,j} + U_{i,j+1} = 0$$

→ con condiciones Dirichlet cero.

Consideremos la transformación

$$U_{i,j} = \lambda^{(i+j)/2} V_{i,j}$$

$$\Rightarrow \lambda \lambda^{(i-1+j)/2} V_{i-1,j} + \lambda \lambda^{(i+j-1)/2} V_{i,j-1} - 4 \lambda \lambda^{(i+j)/2} V_{i,j}$$
$$+ \lambda^{(i+1+j)/2} V_{i+1,j} + \lambda^{(i+j+1)} V_{i,j+1} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^{(i+j+1)/2} \left(V_{i-1,j} + V_{i,j-1} - 4 \lambda^{\frac{1}{2}} V_{i,j} + V_{i+1,j} + V_{i,j+1} \right) = 0$$

$$\Rightarrow V_{i-1,j} + V_{i,j-1} - 4 \lambda^{\frac{1}{2}} V_{i,j} + V_{i+1,j} + V_{i,j+1} = 0.$$

Motivados por el hecho de que a nivel continuo las funciones

$$\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(ny)$$

se anulan en la frontera y son eigenfunciones del Laplaciano

$$\Delta\left(\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(ny)\right) = -(m^2+n^2)\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(ny)$$

busquemos eigenvectores de la forma:

$$V_{i,j} = \operatorname{sen}(mih)\operatorname{sen}(njh)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior y usando la relación

$$\operatorname{sen}(m(i-1)h)\operatorname{sen}(njh) + \operatorname{sen}(mih)\operatorname{sen}(n(j-1)h)$$

$$+ \operatorname{sen}(m(i+1)h)\operatorname{sen}(njh) + \operatorname{sen}(mih)\operatorname{sen}(n(j+1)h)$$

$$= 2\left(\cos(mh) + \cos(nh)\right) V_{i,j} \, ,$$

tenemos . . .

$$0 = \left[2\left(\cos(mh) + \cos(nh)\right) - 4\lambda^{1/2}\right] V_{i,j}$$

$\Rightarrow$ ' valores de la matriz G están por:

$$\lambda_{m,n} = \left(\frac{1}{2}\left(\cos(mh) + \cos(nh)\right)\right)^2 \qquad m,n = 1, \dots, N-1 .$$

Podemos ver fácilmente que el e-valor mas grande es

$$\lambda_{m,n} = \cos^2(h) .$$