Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Parciales (Métodos en Diferencias Finitas)
Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM
Semestre 2022 - 1
Examen 3

Profesor: Gerardo Hernández Dueñas

Diciembre 8, 2021

*** POR FAVOR ESCRIBE TU NOMBRE EN CADA HOJA**
*** EXPLICA TU RESPUESTA E INCLUYE LOS DETALLES**

NUMERO TOTAL DE PAGINAS: 5

TU NOMBRE:

Prob 1 /25	
Prob 2 25	
Prob 3 /25	
Prob 4 /25	
TOTAL /100	

Mucho éxito en su examen!

Problema 1: Considera el problema de Dirichlet de la ecuación de Laplace en el dominio $0 < y < a = rh, 0 < x < b = sh$. Muestra que el radio espectral de la iteración de Gauss-Seidel es

$$\lambda = \left[\frac{1}{2}\left(\cos(\pi/r) + \cos(\pi/s)\right)\right]^2.$$

Nota: Pueden hacer la demostración general como en la tarea o elegir un ejemplo con una resolución fija h.

Problema 2: Usando el método de las características, resuelve el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t - x^2 u_x &= 0, \qquad -\infty < x < \infty \\ \\ u(x, t = 0) &= u_o(x), \end{cases}$$

donde $u_o(x)$ es una función suave. Demuestra que esta ecuación diferencial parcial no genera ondas de choque, mostrando que las curvas características no se intersectan.

Problema 3: Considera la ecuación hiperbólica escalar

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0, -\infty < x < \infty,$$

conocida como ecuación de Burgers.

a) Usa el método de las características para resolver la ecuación de Burgers con condiciones iniciales:

$$u(x, t = 0) = x + \mathrm{sign}(x) x^2 = \begin{cases} x - x^2, & x < 0 \\ \\ x + x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

y encuentra la formula explícita de la solución.

b) Considera ahora la condición inicial $u(x, t = 0) = x + x^2$. Verifica si hay formación de ondas de choque.

Problema 4: Considera el método ADI

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{(k+1/2)} &= U_{i,j}^{(k)} + \frac{1}{4}\left[U_{i+1,j}^{(k+1/2)} + U_{i-1,j}^{(k+1/2)} - 2\,U_{i,j}^{(k+1/2)}\right] + \frac{1}{4}\left[U_{i,j+1}^{(k)} + U_{i,j-1}^{(k)} - 2\,U_{i,j}^{(k)}\right] \\ U_{i,j}^{(k+1)} &= U_{i,j}^{(k+1/2)} + \frac{1}{4}\left[U_{i+1,j}^{(k+1/2)} + U_{i-1,j}^{(k+1/2)} - 2\,U_{i,j}^{(k+1/2)}\right] + \frac{1}{4}\left[U_{i,j+1}^{(k+1)} + U_{i,j-1}^{(k+1)} - 2\,U_{i,j}^{(k+1)}\right] \end{aligned}$$

para la ecuación de Laplace en una región rectangular $[0,1]\times[0,1](x,y)$ con condiciones de frontera

$$u(x,0) = 1, u(x,1) = 2, u(0,y) = 1 + y, u(1,y) = 1 + y^2.$$

Escribe el sistema en forma matricial para $h = 1/3$.