SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS I
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM
SEMESTRE 2021 - 2
TAREA 6

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Miércoles, 21 de abril, 2021.
Antes de las 4:40 PM 100%
Después de las 4:40 PM y hasta las 12 PM 80%
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Considera el llamado método θ para $u'(t) = f(u(t), t)$, dado por

$$U^{n+1} = U^n + k\left[(1-\theta)f(U^n, t_n) + \theta f(U^{n+1}, t_{n+1})\right],$$

donde θ es un parámetro fijo. Los valores $\theta = 0, 1/2, 1$ nos da métodos ya vistos en clase.

(a) Un método numérico se dice que es A-estable si la región de estabilidad absoluta contiene a todo el semi-plano complejo izquierdo (parte real negativa). Demuestra que el método θ es A-estable para $\theta \geq 1/2$.

(b) Grafica la región de estabilidad para $\theta = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$ y comenta cómo es la región de estabilidad para otros valores de θ.

(a) $f(U,t) = \lambda U \Rightarrow U^{n+1} = U^n + k[(1-\theta)\lambda U^n + \theta\lambda U^{n+1}]$

$\Rightarrow U^{n+1} = U^n + (1-\theta)z U^n + \theta z U^{n+1}$

super-índice → potencia.

Buscamos soluciones numéricas de la forma: $U^n = \zeta^n$.

$$\Rightarrow \zeta^{n+1} = \zeta^n + (1-\theta)z\zeta^n + \theta z \zeta^{n+1}$$

Dividiendo $\div \zeta^n$, nos queda:

$$\zeta = 1 + (1-\theta)z + \theta z \zeta$$

$$\Rightarrow (1-\theta z)\zeta = 1 + (1-\theta)z \rightarrow \zeta - 1 = (1-\theta+\theta\zeta)z$$

$$\Rightarrow \zeta = \frac{1+(1-\theta)z}{1-\theta z} \quad \text{ó} \quad z = \frac{\zeta-1}{1-(1-\zeta)\theta}$$

Si el método es A-estable, eso quiere decir que $\forall\, z = x+iy \in \mathbb{C}$ con $x \leq 0$ satisface que $|\zeta| \leq 1$.

$$\Rightarrow \zeta = \frac{1+(1-\theta)(x+iy)}{1-\theta(x+iy)} = \frac{1+(1-\theta)x + i(1-\theta)y}{1-\theta x - i\theta y}$$

Debemos verificar que:

$$\frac{(1+(1-\theta)x)^2 + ((1-\theta)y)^2}{(1-\theta x)^2 + (\theta y)^2} \leq 1$$

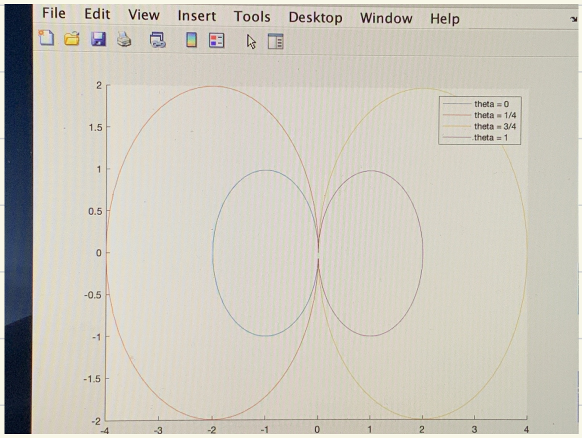
$$\Longleftrightarrow (1+(1-\theta)x)^2 + ((1-\theta)y)^2 - (1-\theta x)^2 - (\theta y)^2 \leq 0$$

Simplicando la expresión, esto es equivalente a

$$2x + x^2(1-2\theta) + y^2(1-2\theta) \leq 0,$$

lo cual es cierto si $x \leq 0$ y $\theta \geq \frac{1}{2}$

(b)



Aquí se muestra una gráfica de las fronteras de la regiones de estabilidad para $\theta = 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1$. Para $\theta = \frac{1}{2}$ ya sabemos que es el semiplano izquierdo. Podemos ver entonces que la región de estabilidad comienza como un disco del lado izquierdo y va cubriendo más hasta llegar a todo el plano excepto un disco del lado derecho.