SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS I
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM
SEMESTRE 2021 - 2
TAREA 5

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Miércoles, 14 de abril, 2021.
Antes de las 4:40 PM 100%
Después de las 4:40 PM y hasta las 12 PM 80%
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Cuales de los siguientes métodos lineales multipaso son convergentes? Para lo que no lo son, determina si son consistentes, no cero-estables, o ambos.

(a) $U^{n+2} = \frac{1}{2}U^{n+1} + \frac{1}{2}U^n + 2kf(U^{n+1})$
(b) $U^{n+1} = U^n$
(c) $U^{n+4} = U^n + \frac{4}{3}k(f(U^{n+3}) + f(U^{n+2}) + f(U^{n+1}))$
(d) $U^{n+3} = -U^{n+2} + U^{n+1} + U^n + 2k(f(U^{n+2}) + f(U^{n+1}))$

Problema 2: Considera la ecuación en diferencias finitas $U^{n+2} = U^n$ con valores iniciales U_o y U^1. La solución es claramente

$$U^n = \begin{cases} U^0 & \text{si} \quad n \text{ es par.} \\ \\ U^1 & \text{si} \quad n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Usando el polinomio característico, se puede encontrar encontrar expresión alternativa para la solución

$$U^n = \frac{1}{2}(U^0 + U^1) + \frac{1}{2}(U^0 - U^1)(-1)^n.$$

Ahora considera la ecuación en diferencias finitas $U^{n+4} = U^n$ con cuatro valores iniciales U^0, U^1, U^2, U^3. Usa el polinomio característico para encontrar una expresión análoga para la solución numérica.

Problema 3:

(a) Encuentra la solución a la ecuación en diferencias finitas $2U^{n+3} - 5U^{n+2} + 4U^{n+1} - U^n = 0$.
Sugerencia: Una raíz del polinomio característica es $\zeta = 1$.
(b) Determina la solución a esta ecuación en diferencias finitas con los valores iniciales $U^0 = 11, U^1 = 5, U^2 = 1$. ¿Qué valor tiene U^{10}?
(c) Considera el método lineal multipaso

$$2U^{n+3} - 5U^{n+2} + 4U^{n+1} - U^n = k(\beta_o f(U^n) + \beta_1 f(U^{n+1})).$$

¿Para qué valores de β_o y β_1 se obtiene un error local de truncamiento de orden $O(k^2)$?
(d) Supongamos que se usan los valores β_o y β_1 del inciso anterior. ¿Es este método convergente?

Problema 1.

(a) El error de truncamiento es:

$$\tau = \frac{u(t+2k) - \frac{1}{2}u(t+k) - \frac{1}{2}u(t)}{k} - 2f(u(t+k))$$

$$= \frac{1}{k}\left[u + u' 2k - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}u'k - \frac{1}{2}u + O(k^2)\right] - 2u' - 2u''k$$

$$= 2u' - \frac{1}{2}u' - 2u' + O(k) = -\frac{1}{2}u'(t) + O(k) \xrightarrow[k\to 0]{} 2u' \neq 0$$

$\Rightarrow$ El método no es consistente.

Polinomio característico:

$$\rho(\zeta) = \zeta^2 - \frac{1}{2}\zeta - \frac{1}{2}$$

Raíces: $$\zeta = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 4 \cdot 1 \cdot (-\frac{1}{2})}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}}{2}$$

$\Rightarrow \zeta = 1, \frac{1}{2}$

$\therefore$ Este método es no consistente y cero estable.
$\Rightarrow$ no es convergente

(b)

$$\tau = \frac{u(t+k) - u(t)}{k} = u'(t) + O(k) \xrightarrow[k\to 0]{} u'(t) \neq 0$$

$$\rho(\zeta) = \zeta - 1$$

$\therefore$ Este método es no consistente y cero estable
$\Rightarrow$ Es no convergente.

(c):

$$\tau = \frac{u(t+4k) - u(t)}{k} - \frac{4}{3}\left(f(u(t+3k)) + f(u(t+2k)) + f(u(t+k)) \right)$$

$$= 4u'(t) + \mathcal{O}(k) - \frac{4}{3}(3u'(t)) + \mathcal{O}(k)$$

$$= \mathcal{O}(k) \xrightarrow[k \to 0]{} 0$$

$\rho(\zeta) = \zeta^4 - 1 \Rightarrow$ Las raices son $\zeta = 1, i, -1, -i$

$\Rightarrow$ El método es consistente y cero estable

$\Rightarrow$ Es convergente

(d)

$$\tau = \frac{1}{k}\left[u(t+3k) + u(t+2k) - u(t+k) - u(t) \right] - 2\left(f(u(t+2k)) + f(u(t+k)) \right)$$

$$= \frac{1}{k}\left[u + u'3k + u + u'2k - u - u'k - u + \mathcal{O}(k^2) \right]$$
$$-2\left(u' + u''2k + u' + u''k \right) + \mathcal{O}(k^2)$$

$$= 4u' - 4u' + \mathcal{O}(k) = \mathcal{O}(k) \xrightarrow[k \to 0]{} 0$$

$$\rho(\zeta) = \zeta^3 + \zeta^2 - \zeta - 1 = 0$$

Las raices son $1, -1, -1$

$\therefore$ El método es consistente pero no cero estable

$\therefore$ Es no convergente.

Problema 2:

$$U^{n+4} = U^n \quad \Rightarrow \quad \rho(z) = z^4 - 1$$

$\Rightarrow$ Las raices son $z = 1, i, -1, -i$

Usando estas raices, el método se escribe como:

$$U^n = C_1 1^n + C_2 i^n + C_3 (-1)^n + C_4 (-i)^n$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} U^0 &= C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \\ U^1 &= C_1 + iC_2 - C_3 - iC_4 \\ U^2 &= C_1 - C_2 + C_3 - C_4 \\ U^3 &= C_1 - iC_2 - C_3 + iC_4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} U^0 + U^2 &= 2C_1 + 2C_3 \\ U^1 + U^3 &= 2C_1 - 2C_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U^0 + U^1 + U^2 + U^3 = 4C_1 \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{1}{4}(U^0 + U^1 + U^2 + U^3)}$$

$$\Rightarrow 2C_3 = U^0 + U^2 - 2\frac{1}{4}(U^0 + U^1 + U^2 + U^3) = U^0 + U^2 - \frac{1}{2}U^0 - \frac{1}{2}U^1 - \frac{1}{2}U^2 - \frac{1}{2}U^3$$

$$\Rightarrow \boxed{C_3 = \frac{1}{4}U^0 - \frac{1}{4}U^1 + \frac{1}{4}U^2 - \frac{1}{4}U^3}$$

$$C_2 + C_4 = U^0 - C_1 - C_3 = U^0 - \frac{1}{4}(U^0 + \cancel{U^1} + U^2 + \cancel{U^3}) - \frac{1}{4}(U^0 - \cancel{U^1} + U^2 - \cancel{U^3}) = \frac{1}{2}(U^0 - U^2)$$

$$C_2 - C_4 = \frac{1}{i}\left[U^1 - C_1 + C_3\right] = \frac{1}{i}\left[U^1 - \frac{1}{4}(\cancel{U^0} + U^1 + \cancel{U^2} + U^3) + \frac{1}{4}(\cancel{U^0} - U^1 + \cancel{U^2} - U^3)\right]$$

$$= \frac{1}{2i}(U^1 - U^3)$$

$$\Rightarrow 2C_2 = \frac{1}{2}(U^0 - U^2) + \frac{1}{2i}(U^1 - U^3) = \frac{1}{2}(U^0 - iU^1 - U^2 + iU^3)$$

$$\Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{1}{4}(U^0 - iU^1 - U^2 + iU^3)}$$

$$C_4 = \frac{1}{2}U^0 - \frac{1}{2}U^2 - C_2 = \frac{1}{2}(U^0 - U^2) - \frac{1}{4}(U^0 - iU^1 - U^2 + iU^3)$$

$$\Rightarrow \boxed{C_4 = \frac{1}{4}(U^0 + iU^1 - U^2 - iU^3)}$$

$$\Rightarrow U^n = \frac{1}{4}(U^0 + U^1 + U^2 + U^3) + \frac{1}{4}(U^0 - iU^1 - U^2 + iU^3)(i)^n$$

$$\frac{1}{4}(U^0 - U^1 + U^2 - U^3)(-1)^n + \frac{1}{4}(U^0 + iU^1 - U^2 - iU^3)(-i)^n$$

Problema 3:

(a): El polinomio característico es:

$$p(z) = 2z^3 - 5z^2 + 4z - 1$$

Este polinomio se puede factorizar como

$$p(z) = (z-1)^2(2z-1), \text{ con raíces:}$$

$$z = \frac{1}{2}, 1, 1$$

Por el método visto en clase, sabemos que el método se escribe como:

$$U^n = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + C_2 + C_3 n$$

$$U^0 = C_1 + C_2$$
$$U^1 = \frac{1}{2}C_1 + C_2 + C_3$$
$$U^2 = \frac{1}{4}C_1 + C_2 + 2C_3$$

$$\Rightarrow U^0 - U^1 = \frac{1}{2}C_1 - C_3$$
$$U^1 - U^2 = \frac{1}{4}C_1 - C_3$$

$$\Rightarrow U^0 - 2U^1 + U^2 = \frac{1}{4}C_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_1 = 4U^0 - 8U^1 + 4U^2}$$

$$\Rightarrow C_2 = U^0 - C_1 = U^0 - 4U^0 + 8U^1 - 4U^2 = -3U^0 + 8U^1 - 4U^2$$

$$\Rightarrow \boxed{C_2 = -3U^0 + 8U^1 - 4U^2}$$

$$\Rightarrow \quad C_3 = U^1 - \tfrac{1}{2}C_1 - C_2 = U^1 - \tfrac{1}{2}\left(4U^0 - 8U^1 + 4U^2\right) + 3U^0 - 8U^1 + 4U^2$$

$$= U^1 - 2U^0 + 4U^1 - 2U^2 + 3U^0 - 8U^1 + 4U^2 = U^0 - 3U^1 + 2U^2$$

$$\therefore \boxed{C_3 = U^0 - 3U^1 + 2U^2}$$

$$\therefore \quad U^n = \left(4U^0 - 8U^1 + 4U^2\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)^n - 3U^0 + 8U^1 - 4U^2 + n\left(U^0 - 3U^1 + 2U^2\right)$$

(b): $U^0 = 11, \quad U^1 = 5, \quad U^2 = 1$

$$\Rightarrow C_1 = 4\cdot 11 - 8\cdot 5 + 4\cdot 1 = 44 - 40 + 4 = 8$$

$$C_2 = -3\cdot 11 + 8\cdot 5 - 4\cdot 1 = -33 + 40 - 4 = 3$$

$$C_3 = 11 - 3\cdot 5 + 2\cdot 1 = 11 - 15 + 2 = -2$$

$$\Rightarrow \quad U^{10} = 8\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^{10} + 3 - 2\cdot 10 \approx -16.9922$$

(c):

$$\tau = \frac{2u(t+3k) - 5u(t+2k) + 4u(t+k) - u(t)}{k} - \beta_0 f(u(t)) - \beta_1 f(u(t+k))$$

$$= \frac{1}{k}\Big[\cancel{2u} + \cancel{2u'3k} + 2u''\frac{(3k)^2}{2} + 2u'''\frac{(3k)^3}{6} - \cancel{5u} - \cancel{5u'2k} - 5u''\frac{(2k)^2}{2} - 5u''\frac{(2k)^3}{6}$$
$$+ \cancel{4u} + \cancel{4u'k} + 4u''\frac{k^2}{2} + 4u'''\frac{k^3}{6} - \cancel{u}\Big] - \beta_0 u'(t) - \beta_1 u' - \beta_1 u'' k + O(k^2)$$

$$= u'(t)\left[-\beta_0-\beta_1\right] + u''(t)k\left[9 -10 +2 -\beta_1\right] + O(k^2)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \beta_0+\beta_1 &= 0 \\ 1 -\beta_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \beta_0 = -1, \quad \beta_1 = 1.$$

$$\Rightarrow 2U^{n+3} - 5U^{n+2} + 4U^{n+1} = k\left(-f(U^n) + f(U^{n+1})\right)$$

(d):

Dado que el método no es cero estable, el método no es convergente. Sin embargo tiene su región de estabilidad absoluta dada por el polinomio:

$$p(\zeta, z) = 2\zeta^3 - 5\zeta^2 + 4\zeta - 1 - z\,\tfrac{233}{4}(1-\zeta)$$