SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS I
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM
SEMESTRE 2021 - 2
TAREA 5

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Miércoles, 14 de abril, 2021.

Antes de las 4:40 PM 100%

Después de las 4:40 PM y hasta las 12 PM 80%

Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Cuales de los siguientes métodos lineales multipaso son convergentes? Para lo que no lo son, determina si son consistentes, no cero-estables, o ambos.

(a) $U^{n+2} = \frac{1}{2}U^{n+1} + \frac{1}{2}U^n + 2kf(U^{n+1})$

(b) $U^{n+1} = U^n$

(c) $U^{n+4} = U^n + \frac{4}{3}k(f(U^{n+3}) + f(U^{n+2}) + f(U^{n+1}))$

(d) $U^{n+3} = -U^{n+2} + U^{n+1} + U^n + 2k(f(U^{n+2}) + f(U^{n+1}))$

Problema 2: Considera la ecuación en diferencias finitas $U^{n+2} = U^n$ con valores iniciales U_o y U^1. La solución es claramente

$$U^n = \begin{cases} U^0 & \text{si} \quad n \text{ es par.} \\ U^1 & \text{si} \quad n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Usando el polinomio característico, se puede encontrar encontrar expresión alternativa para la solución

$$U^n = \frac{1}{2}(U^0 + U^1) + \frac{1}{2}(U^0 - U^1)(-1)^n.$$

Ahora considera la ecuación en diferencias finitas $U^{n+4} = U^n$ con cuatro valores iniciales U^0, U^1, U^2, U^3. Usa el polinomio característico para encontrar una expresión análoga para la solución numérica.

Problema 3:

(a) Encuentra la solución a la ecuación en diferencias finitas $2U^{n+3} - 5U^{n+2} + 4U^{n+1} - U^n = 0$.
Sugerencia: Una raíz del polinomio característica es $\zeta = 1$.

(b) Determina la solución a esta ecuación en diferencias finitas con los valores iniciales $U^0 = 11, U^1 = 5, U^2 = 1$. ¿Qué valor tiene U^{10}?

(c) Considera el método lineal multipaso

$$2U^{n+3} - 5U^{n+2} + 4U^{n+1} - U^n = k(\beta_o f(U^n) + \beta_1 f(U^{n+1})).$$

¿Para qué valores de β_o y β_1 se obtiene un error local de truncamiento de orden $O(k^2)$?

(d) Supongamos que se usan los valores β_o y β_1 del inciso anterior. ¿Es este método convergente?