SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS I
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM
SEMESTRE 2021 - 2
TAREA 4

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Miércoles, 24 de marzo, 2021.
Antes de las 4:40 PM 100%
Después de las 4:40 PM y hasta las 12 PM 80%
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 2: Considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'(t) = \cos(t)u(t) \\ \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Encuentra la solución exacta y compárala con las aproximaciones numéricas dadas por los métodos numéricos Euler hacia adelante y el método trapezoidal dados por

$$\begin{cases} \text{Euler:} & \frac{U^{(n+1)}-U^{(n)}}{k} = f(U^n, t_n). \\ \\ \text{Trapezoidal:} & \frac{U^{(n+1)}-U^{(n)}}{k} = \frac{1}{2}\left[\ f(U^{(n)}, t_n) + f(U^{(n+1)}, t_n + k)\ \right]. \\ \\ \text{Adams-Bashforth:} & U^{n+1} = U^n + \frac{k}{24}\left[-9f(U^{n-3}, t_{n-3}) + 37f(U^{n-2}, t_{n-2}) - 59f(U^{n-1}, t_{n-1}) + 55f(U^n, t_n)\right]. \end{cases}$$

En la misma figura debes empalmar las cuatro gráficas, incluyendo la solución exacta, la aproximación de primer orden (Euler), la de segundo orden (trapezoidal), y la de orden 4 (Adams-Bashforth de 4 pasos) a tiempo $T = 10$, con un tamaño de paso $k = 0.1$.

Para cada aproximación numérica, podemos definir el error L^∞ como

$$E = \max_n |U^n - u(t_n)|,$$

donde $u = u(t)$ es la solución exacta. Para cada método numérico, incluye una tabla en donde se muestre $E, E/k, E/k^2, E/k^3$ y E/k^4 para $k = 0.1, 0.01, 0.001$. ¿Qué observas? ¿Son tus observaciones consistentes con el orden de aproximación de cada método?

Respuesta:

La figura 1 muestra las distintas aproximaciones numéricas. El método de Euler de primer orden es el menos preciso, como era de esperarse. En esta resolución con $k = 0.1$, el método de 4 pasos de Adams-Bashforth de orden 4 también muestra una muy buena aproximación.

Los errores se muestran en la tablas de arriba. En general, debemos esperar que si un método es de orden r, la fracción E/k^r debe permanecer acotada para los distintos valores de k. Los errores para el método de Euler están en la tabla 1. Ahí vemos que E y E/k están acotados pero no los renglones de abajo. Esto indica que el método de Euler es efectivamente de orden 1. La tabla 2 muestra los errores para el método trapezoidal. En ese caso, E/k^2 está acotado y a partir de E/k^3 los valores crecen. Esto nos confirma que el método es de segundo orden. Para el método de

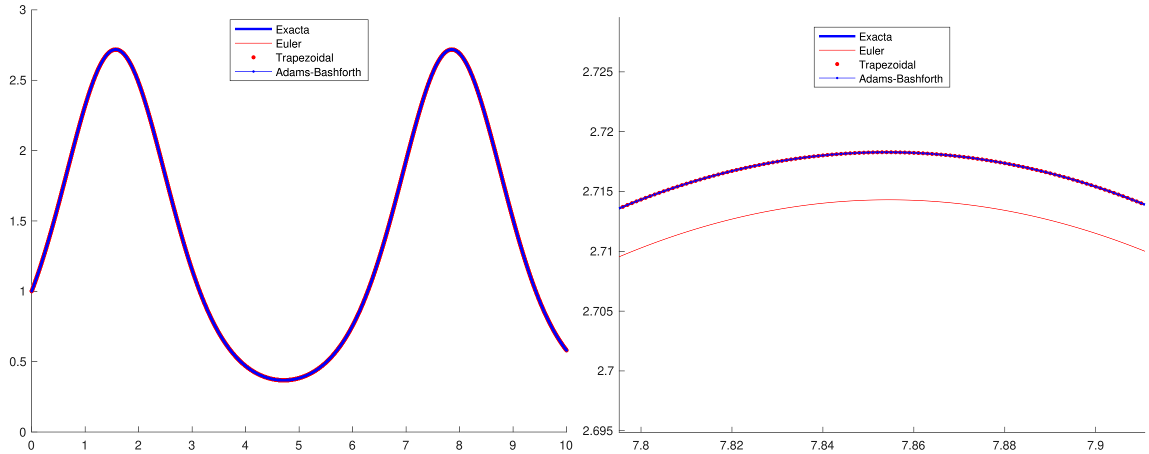

FIGURE 1. Panel izquierdo: Soluciones exacta y numéricas. Panel derecho: Acercamiento cerca del segundo máximo local en $x \approx 7.86$

TABLE 1. Resultados para el método de Euler

	$k = 0.1$	$k = 0.01$	$k = 0.01$
E	3.9×10^{-1}	4.14×10^{-2}	4.17×10^{-2}
E/k	3.9	4.14	4.17
E/k^2	3.9×10	4.14×10^{2}	4.17×10^{3}
E/k^3	3.9×10^{2}	4.14×10^{4}	4.17×10^{6}
E/k^4	3.9×10^{3}	4.14×10^{6}	4.17×10^{9}

TABLE 2. Resultados para el método trapezoidal

	$k = 0.1$	$k = 0.01$	$k = 0.01$
E	4.15×10^{-3}	4.15×10^{-5}	4.15×10^{-7}
E/k	4.15×10^{-2}	4.15×10^{-3}	4.15×10^{-4}
E/k^2	4.15×10^{-1}	4.15×10^{-1}	4.15×10^{-1}
E/k^3	4.15	4.15×10^{1}	4.15×10^{2}
E/k^4	4.15×10^{1}	4.15×10^{3}	4.15×10^{5}

TABLE 3. Resultados para el método de Adams-Basthforth

	$k = 0.1$	$k = 0.01$	$k = 0.01$
E	9.39×10^{-4}	7.88×10^{-8}	7.69×10^{-12}
E/k	9.39×10^{-3}	7.88×10^{-6}	7.69×10^{-9}
E/k^2	9.39×10^{-2}	7.88×10^{-4}	7.69×10^{-6}
E/k^3	9.39×10^{-1}	7.88×10^{-2}	7.69×10^{-3}
E/k^4	9.39	7.88	7.69

Adams-Bashforth, podemos ver que E/k^4 está claramente acotado, confirmando que el método es de orden 4. Encontré necesario definir los primeros 4 pasos de manera precisa, usando el método trapezoidal. De otra manera, se reduce a orden 2.