SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS I
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM
SEMESTRE 2021 - 2
TAREA 3

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Miércoles, 17 de marzo, 2021.
Antes de las 4:40 PM 100%
Después de las 4:40 PM y hasta las 12 PM 80%
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'(t) = \cos(t)u(t) \\ \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Encuentra la solución exacta y compárala con las aproximaciones numéricas dadas por los métodos numéricos Euler hacia adelante y el método trapezoidal dados por

$$\begin{cases} \text{Euler:} & \frac{U^{(n+1)}-U^{(n)}}{k} = f(U^n, t_n) \\ \\ \text{Trapezoidal:} & \frac{U^{(n+1)}-U^{(n)}}{k} = \frac{1}{2}\left[\, f(U^{(n)}, t_n) + f(U^{(n+1)}, t_n + k)\,\right] \end{cases}$$

En la misma figura debes empalmar las tres gráficas, incluyendo la solución exacta, la aproximación de primer orden (Euler) y la de segundo orden (trapezoidal) a tiempo $T = 10$, con un tamaño de paso $k = 0.1$. En otra figura, repite los cálculo para $T = 100$, con el mismo tamaño de paso. Explica tus observaciones.
Nota: Para el método trapezoidal, debes despejar $U^{(n+1)}$.

Respuesta:

Usando separación de variables, la solución exacta es

$$u(t) = \exp(\sin(t)).$$

Para el método trapezoidal, y despejando U^{n+1}, la aproximación numérica está dada por

$$U^{(n+1)} = \frac{1 + \frac{k}{2}\cos(t_n)}{1 - \frac{k}{2}\cos(t_n + k)} U^{(n)}.$$

La figura 1 muestra la solución a tiempo $t = 1$ (panel izquierdo) y $t = 10$ (panel derecho) usando un tamaño de paso $k = 0.01$. La solución numérica es muy cercana a la exacta. Para $T = 10$, la solución dada por el método de Euler tiene un error numérico visible en el segundo máximo local en $t \approx 7.86$. La aproximación de segundo orden es mucho mejor en este caso.

Como algo adicional, vamos a considerar un tamaño de paso $k = 0.1$, el cual toma 100 pasos para $T = 10$ y 1000 pasos para $T = 100$. Los resultados se muestran en la figura 2. En esta baja resolución podemos ver la ventaja de usar métodos numéricos de segundo orden. En el panel de la izquierda tenemos un error numérico bastante evidente en el método de orden 1 (línea roja sólida),

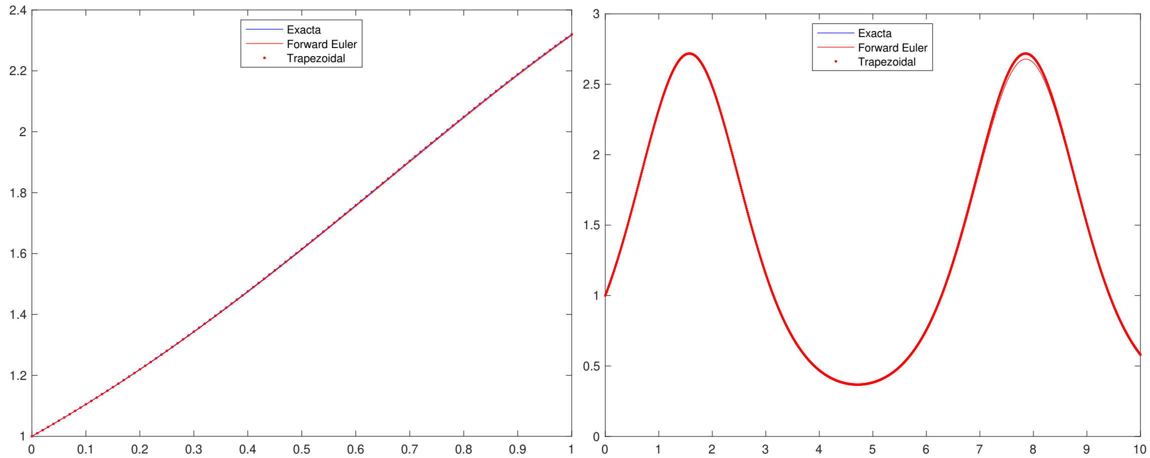

FIGURE 1. Panel izquierdo: Solución a tiempo $T = 10$, Panel derecho: Solución a tiempo $T = 100$.

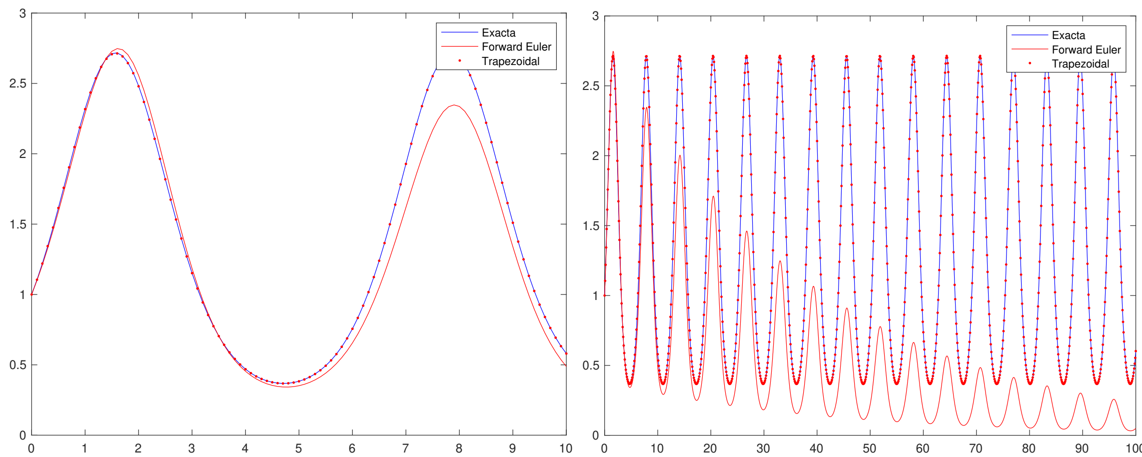

FIGURE 2. Panel izquierdo: Solución a tiempo $T = 10$. Panel derecho: Solución a tiempo $T = 100$. Se usa una resolución de $k = 0.1$.

el cual se agudiza en la simulación más larga del panel de la derecha. La solución de segundo orden (línea roja punteada) muestra una aproximación muy cercana a la solución exacta.

Problema 2: En clase, vimos que un método basado en series de Taylor de segundo orden para la ecuación

$$u'(t) = t^2 \sin(u(t))$$

está dado por

$$U^{(n+1)} = U^{(n)} + kt_n^2 \sin\left(U^{(n)}\right) + \frac{1}{2}k^2 \left[2t_n \sin\left(U^{(n)}\right) + t_n^4 \cos\left(U^{(n)}\right) \sin\left(U^{(n)}\right)\right].$$

Deriva el método de tercer orden basado en series de Taylor para la misma ecuación.

Respuesta:

Para el método basado en series de tiempo que usa la expansión

$$u(t+k) = u(t) + u'(t)k + u''(t)\frac{k^2}{2} + u'''(t)\frac{k^3}{6} + O(k^4),$$

debemos calcular

$$\begin{aligned} u'(t) &= t^2 \sin(u(t)), \\ u''(t) &= 2t \sin(u(t)) + t^4 cos(u(t)) \sin(u(t)), \\ u'''(t) &= 2\sin(u(t)) + 6t^3 \cos(u(t)) \sin(u(t)) + t^6 \sin(u(t)) \left(\cos^2(u(t)) - \sin^2(u(t))\right). \end{aligned}$$

El método numérico correspondiente es

$$\begin{aligned} U^{(n+1)} &= U^{(n)} + kt_n^2 \sin(U^{(n)}) + \tfrac{k^2}{2} \left[2t_n \sin(U^{(n)}) + t_n^4 \cos(U^{(n)}) \sin(U^{(n)})\right] \\ &\quad + \tfrac{k^3}{6} \left[2\sin(U^{(n)}) + 6t_n^3 \cos(U^{(n)}) \sin(U^{(n)}) + t_n^6 \sin(U^{(n)}) \left(\cos^2(U^{(n)}) - \sin^2(U^{(n)})\right)\right] \end{aligned}$$