SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS I
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM
SEMESTRE 2021 - 2
TAREA 2

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Miércoles, 10 de marzo, 2021.
Antes de las 4:40 PM 100%
Después de las 4:40 PM y hasta las 12 PM 80%
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Consideren el problema

$$\begin{cases} u''(x) - 3u'(x) + 2u(x) = 0, 0 < x < 1 \\ \\ u(0) = 1, u(1) = 3, \end{cases}$$

(a) Encuentra la solución exacta.
(b) Resuelve el sistema usando los métodos vistos en clase. Invierte la matriz tridiagonal usando el método de Thomas. Usa 100 puntos en la malla. Explica tu procedimiento y describe lo observado.
(c) Compara la solución exacta y la numérica mostrando una gráfica de la diferencia. Explica tu procedimiento y describe lo observado.

Problema 2: Consideren el problema

$$\begin{cases} (\kappa(x)u'(x))' = f(x), a < x < b \\ \\ u(a) = \alpha, u(b) = \beta, \end{cases}$$

donde $a = -1, \alpha = 0, b = 1, \beta = 1$, $\kappa(x) = 1 + x^2, f(x) = 1 - x^2$.

Resuelve el sistema usando los métodos vistos en clase. Invierte la matriz tridiagonal usando el método de Thomas. Usa 100 puntos en la malla.

Problema 1

$$\begin{cases} u''(x) - 3u'(x) + 2u(x) = 0, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 1, \ u(1) = 3 \end{cases}$$

(a) Busquemos soluciones de la forma: $e^{\lambda x}$

$\Rightarrow$ El polinomio característico es:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$

$\Rightarrow \quad u(x) = ae^x + be^{2x}$

$u(0) = a + b = 1 \quad \Rightarrow b = 1 - a$

$u(1) = ae + be^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad ae + (1-a)e^2 = 3$

$\Rightarrow \quad a(e - e^2) + e^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{e^2 - 3}{e^2 - e}$

$$b = 1 - \frac{e^2 - 3}{e^2 - e} = \frac{e^2 - e - e^2 + 3}{e^2 - e} = \frac{3 - e}{e^2 - e}.$$

$$\therefore u(x) = \frac{e^2 - 3}{e^2 - e} e^x + \frac{3 - e}{e^2 - e} e^{2x}.$$

(b) $\quad u_j \approx u(x_j)$, $\quad x_j = j\Delta x$, $\quad j = 0, \ldots, m, m+1$, $\quad \Delta x = \frac{1}{m+1}$

$$\frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^2} - 3\,\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} + 2u_j = 0, \quad j = 2, \ldots,$$

$$U_0 = 1, \quad U_{m+1} = 3$$

$j = 1$
$$\frac{-2u_1 + u_2}{h^2} - 3\,\frac{u_2}{2h} + 2u_1 = -\frac{u_0}{h^2} - 3\,\frac{u_0}{2h} = -\frac{1}{h^2} - 3\,\frac{1}{2h}$$

$j = m$
$$\frac{u_{m-1} - 2u_m}{h^2} - 3\,\frac{-u_{m-1}}{2h} + 2u_m = -\frac{u_{m+1}}{h^2} + 3\,\frac{u_{m+1}}{2h} = -\frac{3}{h^2} + 3\,\frac{3}{2h}$$

$$\Rightarrow \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix}, \qquad AU = F$$

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2+2h^2 & 1 - 3h/2 & & & \\ 1 + \frac{3h}{2} & -2+2h^2 & 1 - \frac{3h}{2} & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 + \frac{3h}{2} & -2+2h^2 & 1 - \frac{3h}{2} \\ & & & 1 + 3h/2 & -2+2h^2 \end{bmatrix}$$

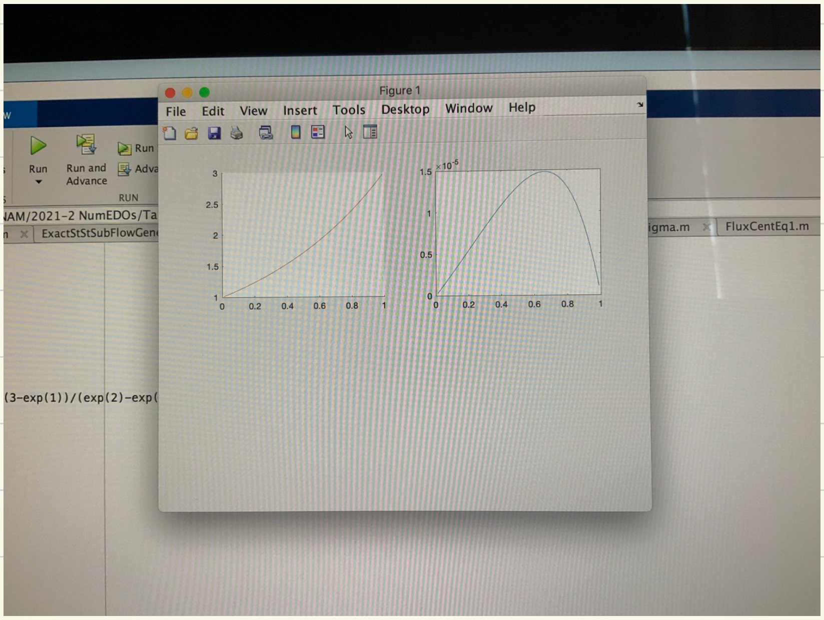
$$F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h^2} - \frac{3}{2h} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{3}{h^2} + \frac{9}{2h} \end{bmatrix}$$

(b) y (c)

$$ae^{2x} - be^{x}$$

$$2ae^{2x} - be^{x} = 0$$

$$2ae - be^{1/2} = 0$$



Se adjunta el algoritmo Thomas.

En la gráfica de la izquierda se muestra la solución. Se muestran tanto la solución exacta como la numérica. Es difícil distinguir la diferencia.

El error se muestra el error, con valores máximos de 1.5×10^{-5}, que es muy chico.

Problema 2:

Aquí sabemos que la matriz es:

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -(k_{1/2}+k_{3/2}) & k_{3/2} & & & \\ k_{3/2} & -(k_{3/2}+k_{5/2}) & k_{5/2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & k_{m-3/2} & -(k_{m-3/2}+k_{m-1/2}) & k_{m-1/2} \\ & & & k_{m-1/2} & -(k_{m-1/2}+k_{m+1/2}) \end{bmatrix}$$

dado que la proximación que estamos tomando es:

$$\frac{1}{h^2}k_{i-1/2}U_{i-1} - \frac{1}{h^2}(k_{i-1/2}+k_{i+1/2})U_i + \frac{1}{h^2}k_{i+1/2}U_{i+1} = f_i, \quad i=1,\dots,m$$

Usando las condiciones de frontera $U_0 = 0$, $U_{m+1} = 1$ tenemos:

Para $i=1$:

$$-(k_{1/2}+k_{3/2})U_1 + k_{3/2}U_2 = f_1 - \frac{1}{h^2}k_{1/2}\cdot 0 = f_1$$

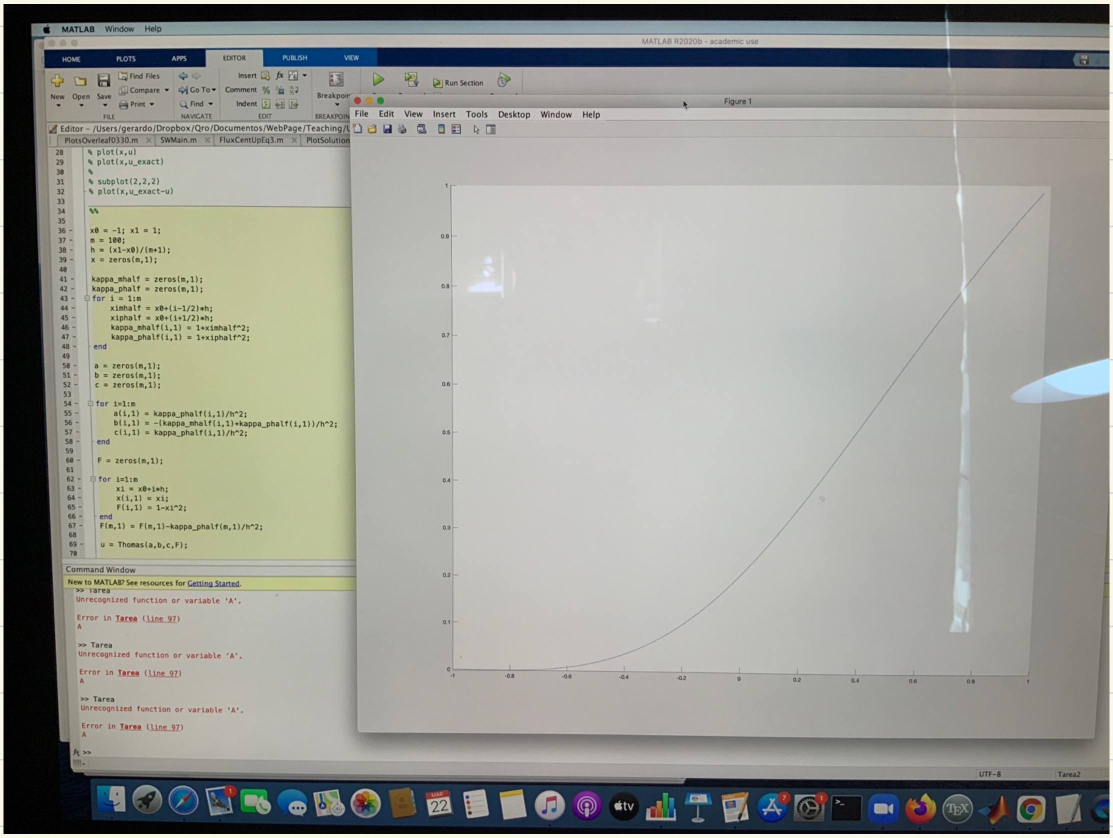
Para $i=m$:

$$-\frac{1}{h^2}(K_{m-1/2}+K_{m+1/2})U_m = f_m - \frac{1}{h^2}K_{m+1/2}\,1$$

$$\Rightarrow \quad AU = F, \quad \text{con}$$

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m - \frac{1}{h^2} K_{m+1/2} \end{bmatrix}$$

La solución se muestra a continuación:



Es claro que la solución es suave y cumple las condiciones de frontera.

Solución exacta:

$$\left((1+x^2)u'(x)\right)' = 1-x^2$$

$$u(-1)=0, \quad u(1)=1$$

$$\Rightarrow (1+x^2)u'(x) = x - \frac{x^3}{3} + c_1$$

$$\Rightarrow u'(x) = \frac{x - x^3/3}{1+x^2} + \frac{c_1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow u(x) = -\frac{x^2}{6} + \frac{2}{3}\log(1+x^2) + c_1 \operatorname{ArcTan}(x) + C_2$$

$$u(-1) = 0 = \frac{2}{3}\log(2) + c_1 \operatorname{ArcTan}(-1) + C_2$$

$$u(1) = 1 = -\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\log(2) + c_1 \operatorname{ArcTan}(1) + C_2$$