

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS I
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM
SEMESTRE 2021 - 2
TAREA 1

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Miércoles, 3 de marzo, 2021.

Antes de las 4:40 PM 100%

Después de las 4:40 PM y hasta las 12 PM 80%

Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1:

- (a) Usa el método de coeficientes indeterminados para generar el sistema 5×5 (que de hecho es de tipo Vandermonde) necesario para determinar una aproximación en diferencias finitas con orden de precisión 4, basado en los 5 puntos

$$u''(x) = c_{-2} u(x - 2h) + c_{-1} u(x - h) + c_0 u(x) + c_1 u(x + h) + c_2 u(x + 2h) + O(h^4).$$

- (b) Comprueba tus respuestas con los coeficientes calculados con el código Matlab `fdtencil.m` adjuntos y también disponible en la página <http://faculty.washington.edu/rjl/fdmbook/chapter1.html>. Se requiere también el código `fdcoeffF.m`
- (c) Comprueba esta aproximación para estimar $u''(1)$, con $u(x) = \sin(3x)$. Genera una tabla del error vs. h para distintos valores de h . Genera una gráfica log-log que confirme la aproximación de orden 4.

Problema 1:

(a)

$$u''(x) = C_{-2} u(x-2h) + C_{-1} u(x-h) + C_0 u(x) + C_1 u(x+h) + C_2 u(x+2h) + O(h^4)$$

$$= C_{-2} \left(u(x) - u'(x)2h + u''(x) \frac{4h^2}{2} - u'''(x) \frac{8h^3}{6} + u^{(4)}(x) \frac{16h^4}{24} + O(h^5) \right)$$

$$+ C_{-1} \left(u(x) - u'(x)h + u''(x) \frac{h^2}{2} - u'''(x) \frac{h^3}{6} + u^{(4)}(x) \frac{h^4}{24} + O(h^5) \right)$$

$$+ C_0 u(x)$$

$$+ C_1 \left(u(x) + u'(x)h + u''(x) \frac{h^2}{2} + u'''(x) \frac{h^3}{6} + u^{(4)}(x) \frac{h^4}{24} + O(h^5) \right)$$

$$+ C_2 \left(u(x) + u'(x)2h + u''(x) \frac{4h^2}{2} + u'''(x) \frac{8h^3}{6} + u^{(4)}(x) \frac{16h^4}{24} + O(h^5) \right)$$

$$= u(x) (C_{-2} + C_{-1} + C_0 + C_1 + C_2)$$

$$+ u'(x)h (-2C_{-2} - C_{-1} + C_1 + 2C_2)$$

$$+ u''(x)h^2 \left(2C_{-2} + \frac{1}{2}C_{-1} + \frac{1}{2}C_1 + 2C_2 \right)$$

$$+ u'''(x)h^3 \left(-\frac{4}{3}C_{-2} - \frac{1}{6}C_{-1} + \frac{1}{6}C_1 + \frac{4}{3}C_2 \right)$$

$$+ u^{(4)}(x)h^4 \left(\frac{2}{3}C_{-2} + \frac{1}{24}C_{-1} + \frac{1}{24}C_1 + \frac{2}{3}C_2 \right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{24} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{-2} \\ C_{-1} \\ C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/h^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La inversa de la matriz anterior es:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & 6 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -1 & -4 \\ 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C_{-2} = -\frac{1}{12h^2}, \quad C_{-1} = \frac{4}{3} \frac{1}{h^2}, \quad C_0 = -\frac{5}{2} \frac{1}{h^2}, \quad C_1 = \frac{4}{3} \frac{1}{h^2}, \quad C_2 = -\frac{1}{12h^2}$$

Podemos ver la comprobación de esto en un código matlab que les envío adjunto.

$$\Rightarrow u''(x) = \frac{1}{h^2} \left(-\frac{1}{12} u(x-2h) + \frac{4}{3} u(x-h) - \frac{5}{2} u(x) + \frac{4}{3} u(x+h) - \frac{1}{12} u(x+2h) \right) + O(h^3)$$

El error de truncamiento es:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{h^5}{h^2} \left(-C_{-2} \frac{32}{120} - C_{-1} \frac{1}{120} + C_1 \frac{1}{120} + C_2 \frac{32}{120} \right) + O(h^4) \\ &= h^3 \left(\cancel{\frac{1}{12}} \cdot \cancel{\frac{4}{15}} - \cancel{\frac{4}{3}} \cdot \cancel{\frac{1}{120}} + \cancel{\frac{4}{3}} \cdot \cancel{\frac{1}{120}} - \cancel{\frac{1}{12}} \cdot \cancel{\frac{4}{15}} \right) + O(h^4) \\ &= O(h^4) \end{aligned}$$

(b)

```
16 % The routine fdcoeffF is used to compute the coefficients.
17 %
18 % Example: fdstencil(2,-1:1);
19 % determines the 2nd order centered approximation of the 2nd derivative.
20 %
21 % From http://www.amath.washington.edu/~rjl/fdmbook/ (2007)
22
23
24 k=2;
25 j = [-2 -1 0 1 2];
26
27 n = length(j);
28 if k>n
29     error('*** length(j) must be larger than k')
30 end
31
32 c = fdcoeffF(k,0,j); % coefficients for k'th derivative
33
34 % print out stencil:
```

Command Window

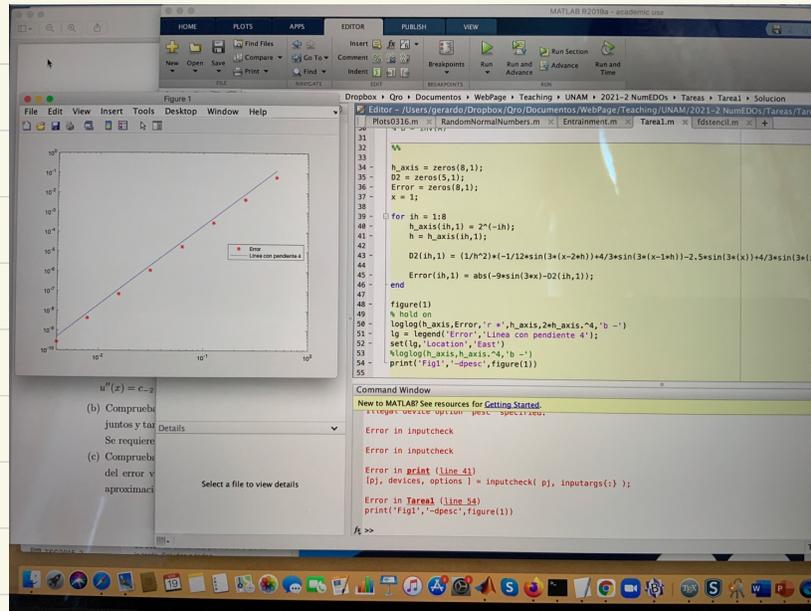
New to MATLAB? See resources for [Getting Started](#).

```
ans =
    1.3333
>> fdstencil
The derivative u''(2) of u at x0 is approximated by
    1/h^2 * [
        -8.333333333333333e-02 * u(x0-2*h) +
         1.333333333333333e+00 * u(x0-1*h) +
        -2.500000000000000e+00 * u(x0) +
         1.333333333333333e+00 * u(x0+1*h) +
        -8.333333333333333e-02 * u(x0+2*h) ]
For smooth u,
Error = 0 * h^3*u^(5) + -0.0111111 * h^4*u^(6) + ...
fx >>
```

MacBook Pro

Aquí se muestra la comprobación usando el código fdstencil.m.

Problema 1 (c):



En la gráfica adjunta se muestra el error como función de h en una gráfica log log. Los valores van de $h = 1/2$ a $h = 1/2^8$.

También se muestra una línea con pendiente 4, mostrando la convergencia en ese orden.

Pueden ver más detalles en los códigos adjuntos.