SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS I
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM
SEMESTRE 2021 - 2
TAREA 1

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Miércoles, 3 de marzo, 2021.
Antes de las 4:40 PM 100%
Después de las 4:40 PM y hasta las 12 PM 80%
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1:

(a) Usa el método de coeficientes indeterminados para generar el sistema 5×5 (que de hecho es de tipo Vandermonde) necesario para determinar una aproximación en diferencias finitas con orden de precisión 4, basado en los 5 puntos

$$u''(x) = c_{-2}\, u(x-2h) + c_{-1}\, u(x-h) + c_o\, u(x) + c_1\, u(x+h) + c_2\, u(x+2h) + O(h^4).$$

(b) Comprueba tus respuestas con los coeficientes calculados con el código Matlab fdtencil.m adjuntos y también disponible en la página http://faculty.washington.edu/rjl/fdmbook/chapter1.html Se requiere también el código fdcoeffF.m

(c) Comprueba esta aproximación para estimar $u''(1)$, con $u(x) = \sin(3x)$. Genera una tabla del error vs. h para distintos valores de h. Genera una gráfica log-log que confirme la aproximación de orden 4.

Problema 1:

(a)

$$u''(x) = C_{-2}u(x-2h) + C_{-1}u(x-h) + C_0 u(x) + C_1 u(x+h) + C_2 u(x+2h) + O(h^4)$$

$$= C_{-2}\left(u(x) - u'(x)2h + u''(x)\frac{4h^2}{2} - u'''(x)\frac{8h^3}{6} + u''''(x)\frac{16h^4}{24} + O(h^5)\right)$$

$$+ C_{-1}\left(u(x) - u'(x)h + u''(x)\frac{h^2}{2} - u'''(x)\frac{h^3}{6} + u''''(x)\frac{h^4}{24} + O(h^5)\right)$$

$$+ C_0 \; u(x)$$

$$+ C_1\left(u(x) + u'(x)h + u''(x)\frac{h^2}{2} + u'''(x)\frac{h^3}{6} + u''''(x)\frac{h^4}{24} + O(h^5)\right)$$

$$+ C_2\left(u(x) + u'(x)2h + u''(x)\frac{4h^2}{2} + u'''(x)\frac{8h^3}{6} + u''''(x)\frac{16h^4}{24} + O(h^5)\right)$$

$$= u(x)\left(C_{-2} + C_{-1} + C_0 + C_1 + C_2\right)$$

$$+ u'(x)h\left(-2C_{-2} - C_{-1} + C_1 + 2C_2\right)$$

$$+ u''(x)h^2\left(2C_{-2} + \tfrac{1}{2}C_{-1} + \tfrac{1}{2}C_1 + 2C_2\right)$$

$$+ u'''(x)h^3\left(-\tfrac{4}{3}C_{-2} - \tfrac{1}{6}C_{-1} + \tfrac{1}{6}C_1 + \tfrac{4}{3}C_2\right)$$

$$+ u''''(x)h^4\left(\tfrac{2}{3}C_{-2} + \tfrac{1}{24}C_{-1} + \tfrac{1}{24}C_1 + \tfrac{2}{3}C_2\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{4}{3} \\ 2/3 & 1/24 & 0 & 1/24 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{-2} \\ C_{-1} \\ C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/h^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La inversa de la matriz anterior es:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 4/3 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -5/2 & 0 & 6 \\ 0 & 2/3 & 4/3 & -1 & -4 \\ 0 & -1/12 & -1/12 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C_{-2} = -\frac{1}{12h^2}, \quad C_{-1} = \frac{4}{3}\frac{1}{h^2}, \quad C_0 = -\frac{5}{2h^2}, \quad C_1 = \frac{4}{3}\frac{1}{h^2}, \quad C_2 = -\frac{1}{12h^2}$$

Podemos ver la comprobación de esto en un código matlab que les envío adjunto.

$$\Rightarrow u''(x) = \frac{1}{h^2}\left(-\frac{1}{12}u(x-2h) + \frac{4}{3}u(x-h) - \frac{5}{2}u(x) + \frac{4}{3}u(x+h) - \frac{1}{12}u(x+2h)\right) + O(h^3)$$

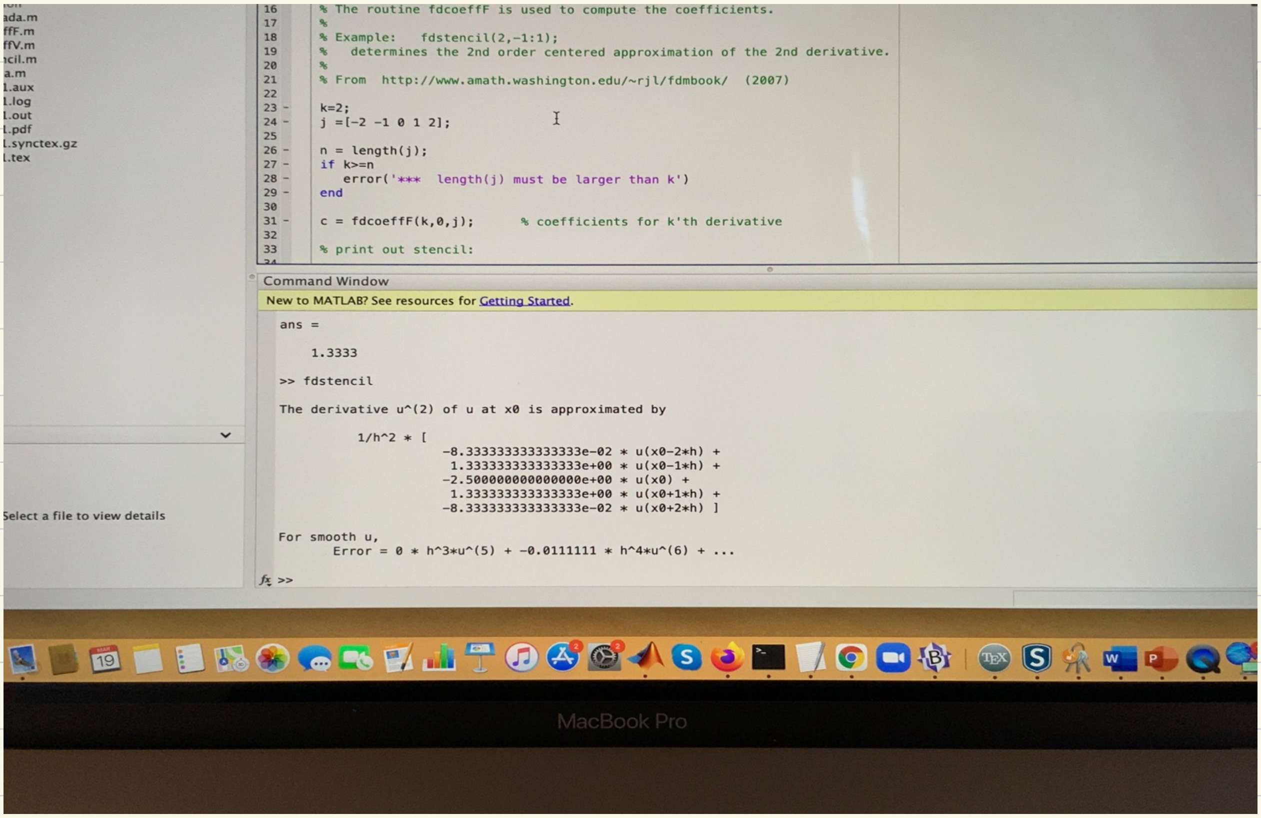
El error de truncamiento es:

$$\tau = \frac{h^5}{h^2}\left(-C_{-2}\frac{32}{120} - C_{-1}\frac{1}{120} + C_1\frac{1}{120} + C_2\frac{32}{120}\right) + O(h^4)$$

$$= h^3\left(\cancel{\frac{1}{12}\cdot\frac{4}{15}} - \cancel{\frac{4}{3}\frac{1}{120}} + \cancel{\frac{4}{3}}\frac{1}{120} - \cancel{\frac{1}{12}\frac{4}{15}}\right) + O(h^4)$$

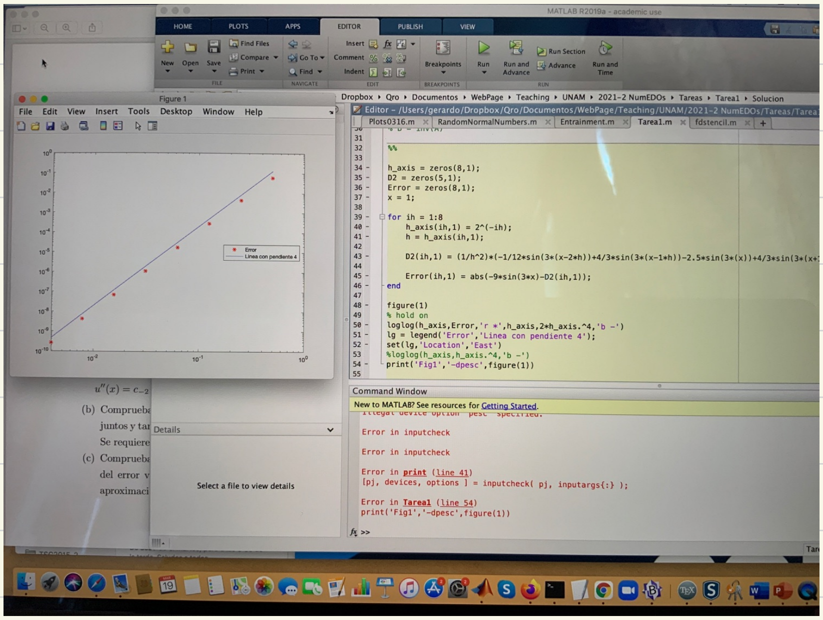
$$= O(h^4)$$

(b)



Aquí se muestra la comprobación usando el código fdstencil.m.

Problema 1 (c):



En la gráfica adjunta se muestra el error como función de h en una gráfica log log. Los valores van de $h = 1/2$ a $h = 1/2^8$.

Tambien se muestra una línea con pendiente 4, mostrando la convergencia en ese orden.

Pueden ver más detalles en los códigos adjuntos.