Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias I
Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM
Semestre 2021 - 2
Proyecto Final

Profesor: Gerardo Hernández Dueñas

Junio 16, 2021

*** POR FAVOR ESCRIBE TU NOMBRE EN CADA HOJA**
*** EXPLICA TU RESPUESTA E INCLUYE LOS DETALLES**

NUMERO TOTAL DE PAGINAS: 3

TU NOMBRE:

Fecha límite: Martes 22 de junio

Mucho éxito en su examen!

Parte teórica:

Problema 1. Usando la notación del libro de Butcher, muestra que el método dado por $\alpha(z) = 1 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}z^2, \beta(z) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}z$ es G-estable, encontrando la correspondiente matriz G.

Problema 2. Muestra que si $q_1 + iq_2$ está en el semi-plano izquierdo, entonces la ecuación diferencial ordinaria

$$y'(x) = q\, y(x)$$

se puede escribir como un sistema

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & -q_2 \\ q_2 & q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

donde $y(x) = y_1(x) + iy_2(x)$. Más aún, muestra que este sistema satisface la condición:

$$\langle f(u) - f(v), u - v \rangle \leq 0.$$

para la función lineal dada por la matriz de arriba y el producto interno usual. Como sabemos, esta es una condición necesaria para al estabilidad G.

Parte práctica:

Consideremos los siguientes problemas

- Ecuación logística:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} & = & ay - by^2, \\ \\ y(t_o) & = & y_o. \end{cases}$$

  con solución exacta

$$y(t) = \frac{ay_o}{by_o + (a - by_o)e^{-a(t-t_o)}}.$$

  Tomar aquí $a = 1, b = 0.01, y_o = 3$ a tiempo final $t = 5$.

- Caída de un cuerpo con resistencia lineal al viento

$$\begin{cases} m\frac{dv}{dt} & = & -mg - kv \\ \\ v(0) & = & v_o \end{cases}$$

  con solución

$$v(t) = -\frac{mg}{k} + \left(\frac{mg}{k} + v_o\right) e^{-kt/m}.$$

  Toma aquí $v(0) = 0, m = 10$ kg, $k = 0.5$kg s^{-1}, $g = 9.81$ ms^{-2}. Tiempo final $t = 10$.

- La ecuación Able:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y + t}{ty}.$$

  Aquí no hay solución analítica explícita disponible. Estima la solución hasta el tiempo final $t = 10$.

- Considera un objeto en caída con resistencia no-lineal:

$$\begin{cases} m\frac{dv}{dt} &= -mg - k\sqrt{|v|} \\ \\ v(0) &= v_o \end{cases}$$

Aquí tampoco hay solución exacta explícita disponible. Estima la solución a tiempo $t = 10$. Usa los mismos parámetros que en el caso lineal.

Utiliza los siguientes métodos numéricos para resolver los problemas arriba descritos y comprueba el grado de precisión. Para cada ecuación, usar 50,100,200 y 400 pasos en el tiempo.

- Euler
- Midpoint
- Runge-Kutta de 3 pasos (pasos de 1 tercio)
- Método Runge-Kutta clásico de 4 pasos.