Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias I
Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM
Semestre 2021 - 2
Examen 1

Profesor: Gerardo Hernández Dueñas

Marzo 26, 2021

*** POR FAVOR ESCRIBE TU NOMBRE EN CADA HOJA**
*** EXPLICA TU RESPUESTA E INCLUYE LOS DETALLES**

NUMERO TOTAL DE PAGINAS: 6

TU NOMBRE:

Prob 1 /25	
Prob 2 25	
Prob 3 /25	
Prob 4 /25	
TOTAL /100	
Puntos Extra :	

Mucho éxito en su examen!

Problema 1

(a) Usa el método de coeficientes indeterminados para para obtener la aproximación en diferencias finitas con el mayor orden posible, basado en los puntos

$$u''(x) = c_{-2}u(x-2\ h) + c_{-1}\ u(x-h) + c_1\ u(x+h) + c_2\ u(x+2\ h) + O(h^p).$$

y determina el orden p.

(b) Escribe en forma matricial el problema

$$\begin{cases} u''(x) &=& f(x), \\ u(0) &=& 1 \text{ (Condición Dirichlet)}, \\ u'(1) &=& 2\text{(Condición Neumann)}. \end{cases}$$

(c) Si cambias las condiciones por $u'(0) = 1, u'(1) = 2$, ¿qué condición se debe satisfacer para que el problema tenga solución?

Problema 2: Consideren el problema

$$\begin{cases} u''(x) - 2u'(x) + u(x) = 0, 0 < x < 1 \\ \\ u(0) = 1, u(1) = 3, \end{cases}$$

(a) Encuentra el error de truncamiento del método numérico dado por la aproximación

$$\frac{U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}}{h^2} - 2\frac{U_{j+2} - U_{j-2}}{4h} + U_j = 0.$$

(b) Escribe el sistema en forma matricial. ¿Qué ventajas y desventajas puedes identificar en este método numérico?

Problema 3 Implementa el método basado en series de Taylor para derivar un método orden 3 para la ecuación

$$u'(t) = \exp(t)u(t)^3 + \exp(u(t))$$

Problema 4. Deriva el método multi-paso implícito de 2 pasos conocido como la regla de simpson:

$$U^{(n+2)} = U^{(n)} + k\left[\beta_o f\left(U^{(n)}, t_n\right) + \beta_1 f\left(U^{(n+1)}, t_{n+1}\right) + \beta_2 f\left(U^{(n+2)}, t_{n+2}\right)\right].$$

Problema opcional (10 puntos extra). Sea $f(u) = \log(u)$.

(a) Determina la constante de Lipschitz óptima para este función sobre $2 \leq u \leq \infty$.

(b) ¿Es $f(u)$ Lipschitz continua sobre $0 < u < \infty$?

(c) Considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'(t) & = \quad \log(u(t)) \\ u(0) & = 2 \end{cases}$$

Explica por qué podemos concluir que este problema de valor incial tiene solución única para todo $t \geq 0$ basado en la teoría de existencia y unicidad visto en clase. *Sugerencia:* Puedes argumentar que f es Lipschitz continua en un dominio de donde la solución nunca se sale. Si gustas, puedes visualizar esta situación creando una solución numérica.