TALLER DE MODELACIÓN NUMÉRICA - 2021 - 1. TAREA 6

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Lunes, 23 de noviembre de 2020.
Antes de las 5:10 PM 100%
Después de las 5:10 PM y hasta las 12 PM 80%
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Considera la ecuación $u'(t) = f(u(t), t)$, y el método Runge-Kutta de 3 etapas

$$\begin{aligned} F_o &= f(U^n, t_n), & U^{n+1/3} &= U^n + \tfrac{k}{3} f(U^n, t_n) = U^n + \tfrac{k}{3} F_o \\ F_1 &= f(U^{n+1/3}, t_{n+1/3}), & U^{n+2/3} &= U^n + \tfrac{2}{3} k f(U^{n+1/3}, t_{n+1/3}) = U^n + \tfrac{2}{3} k F_1 \\ F_2 &= f(U^{n+2/3}, t_{n+2/3}), & U^{n+1} &= U^n + k(c_o F_o + c_2 F_1 + c_2 F_2). \end{aligned}$$

Encuentra los coeficientes c_o, c_1, c_2 que hacen al método de orden 3.

Problema 2: Considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'(t) = \cos(t) u(t) \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Encuentra la solución exacta y compárala con las aproximaciones numéricas dadas por los métodos numéricos Euler hacia adelante y el método trapezoidal dados por

$$\begin{cases} \text{Euler:} & \frac{U^{(n+1)} - U^{(n)}}{k} = f(U^n, t_n). \\ \text{Trapezoidal:} & \frac{U^{(n+1)} - U^{(n)}}{k} = \frac{1}{2} \left[\ f(U^{(n)}, t_n) + f(U^{(n+1)}, t_n + k) \ \right]. \\ \text{RK del problema 1:} & U^{n+1} = U^n + k(c_o F_o + c_2 F_1 + c_2 F_2). \\ \text{Adams-Bashforth:} & U^{n+1} = U^n + \frac{k}{24} \left[-9 f(U^{n-3}, t_{n-3}) + 37 f(U^{n-2}, t_{n-2}) - 59 f(U^{n-1}, t_{n-1}) + 55 f(U^n, t_n) \right]. \end{cases}$$

En la misma figura debes empalmar las cuatro gráficas, incluyendo la solución exacta, la aproximación de primer orden (Euler), la de segundo orden (trapezoidal), la de tercer orden (Runge-Kutta de 3 etapas), y la de orden 4 (Adams-Bashforth de 4 pasos) a tiempo $T = 10$, con un tamaño de paso $k = 0.1$.

Para cada aproximación numérica, podemos definir el error L^∞ como

$$E = \max_n |U^n - u(t_n)|,$$

donde $u = u(t)$ es la solución exacta. Para cada método numérico, incluye una tabla en donde se muestre $E, E/k, E/k^2, E/k^3$ y E/k^4 para $k = 0.1, 0.01, 0.001$. ¿Qué observas? ¿Son tus observaciones consistentes con el orden de aproximación de cada método?