TALLER DE MODELACIÓN NUMÉRICA - 2021 - 1. TAREA 10

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Miércoles 27 de enero de 2021.
Antes de las 5:10 PM 100%
Después de las 5:10 PM y hasta las 12 PM 80%
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Considera el siguiente problema de valor inicial para la ecuación de transporte

$$\begin{cases} u_t + au_x &= 0, -7.5 < x < 7.5 \\ u(x,0) &= \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -7.5 \le x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 \le x \le 7.5 \end{cases} \end{cases}$$

con condiciones de frontera libres, y con $a = 0.2$. La solución débil exacta para tiempos suficientemente cortos t es

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -7.5 \le x < at \\ 0 & \text{si} \quad at \le x \le 7.5 \end{cases}$$

Aproxima la solución exacta con el método upwind de alta resolución y compáralo con los métodos *one-sided*, Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff y Beam-Warming de la tarea anterior. El tiempo final es $t = 20$, en una malla con $N = 2000$. Compara los resultados y comenta las ventajas y desventajas de cada uno. Recuerda utilizar la condición CFL para garantizar estabilidad.

Problema 2: Considera un liquido termalmente estratificado contenido en un anillo rotante con radio interno de 0.8 m, radio externo 1 m, y profundidad de 0.1 m. La temperatura en el fondo se mantiene a valor constante T_o. Supongamos que el fluido satisface la ecuación de estado

$$\rho = \rho_o(1 - \epsilon(T - T_o)),$$

con $\rho_o = 10^3$ kg m^{-3} y $\epsilon = 2 \times 10^{-4}$ K^{-1}. Supongamos además que la temperatura se incrementa de forma lineal con respecto a la altura a lo largo de la frontera externa a una tasa de 1° C cm^{-1} y es constante con respecto a la altura a lo largo de la frontera interna del anillo. Determina la velocidad geostrófica dada por

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}_g}{\partial z} = \frac{\epsilon g}{2\Omega} \boldsymbol{k} \times \nabla T$$

en la frontera superior con una rotación de $\Omega = 1$ rad s^{-1}. Debes suponer que la temperatura depende linealmente con respecto al radio en cada nivel.