TALLER DE MODELACIÓN NUMÉRICA - 2021 - 1. TAREA 1

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Lunes, 12 de octubre, 2020.
Antes de las 5:10 PM 100%
Después de las 5:10 PM y hasta las 12 PM 80%
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: La aproximación lineal de las ecuaciones de Boussinesq se escriben como

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - fv &= -\partial_x p \\
\frac{\partial v}{\partial t} + fu &= -\partial_y p \\
\frac{\partial w}{\partial t} + N\theta &= -\partial_z p \\
\frac{\partial \theta}{\partial t} - Nw &= 0 \\
\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w &= 0,
\end{aligned}
$$

donde $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$ es el campo de velocidades, θ es una fluctuación de densidad re-escalada, p es la presión re-escalada,f es el coeficiente de Coriolis y N es la frecuencia de Brunt-Väisälä. Dado el vector de onda $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$, encuentra las frecuencias σ de las soluciones de ondas planas

$$
\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_u \\ \hat{\phi}_v \\ \hat{\phi}_w \\ \hat{\phi}_\theta \end{pmatrix} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \sigma t)},
$$

donde el eigenvector $(\hat{\phi}_u, \hat{\phi}_v, \hat{\phi}_w, \hat{\phi}_\theta)$ es constante.

Problema 2: Considera el sistema de Lorenz

$$
\begin{aligned}
\frac{dX}{dt} &= -\alpha X + \alpha Y, \\
\frac{dY}{dt} &= rX - Y - XZ, \\
\frac{dZ}{dt} &= XY - bZ.
\end{aligned}
$$

con número de Prandtl $\alpha = 10$, razón de dimensiones $b = 8/3$ y número de Rayleigh $r = 28$. Calcula de forma numérica la solución con condiciones iniciales

(a) $x_o = 0, y_o = 1, z_o = 1.05$,
(b) $x_o = 0, y_o = 1, z_o = 1.05 + 10^{-8}$.

Calcula las trayectorias hasta el tiempo $T = 30$ y con un paso de tiempo $\Delta t = 0.001$. Compara las dos soluciones.