**Taller de Modelación Numérica - 2021 - 1**
**Facultad de Ciencias**
**Universidad Nacional Autónoma de Mexico**
**Examen 1**

**Profesor: Gerardo Hernández Dueñas**

**Octubre 30, 2020**

*** POR FAVOR ESCRIBE TU NOMBRE EN CADA HOJA**
*** EXPLICA TU RESPUESTA E INCLUYE LOS DETALLES**

**NUMERO TOTAL DE PAGINAS: 6**

**TU NOMBRE:**

---

| | |
|---|---|
| Prob 1 /25 | |
| Prob 2 25 | |
| Prob 3 /25 | |
| Prob 4 /25 | |
| TOTAL /100 | |

**Mucho éxito en su examen!**

Taller de Modelación Numérica - Examen 1

**Problema 1:** La relación de dispersión para las ondas Rossby se puede encontrar mediante la siguiente ecuación para la vorticidad potencial

$$\partial_t \left[ \partial_x^2 \eta + \partial_y^2 \eta - \frac{f^2}{gH} \eta \right] + \beta \partial_x \eta = 0,$$

donde el parámetro de Coriolis en el plano $\beta$ es $f + \beta y$, $g$ es la constante gravitacional, y $H$ es la profundidad característica del fluido.

(a) Considerando soluciones de la forma $\eta(x, y, t) = \eta_o \exp(i(k_x x + k_y y - \sigma t))$, obtén la relación de dispersión para estas ondas. **Muestra los cálculos.**

(b) Encuentra además la relación de dispersión de la siguiente discretización:

$$\partial_t \left[ \frac{\eta(x+\Delta x,y,t) - 2\eta(x,y,t) + \eta(x-\Delta x,y,t)}{\Delta x^2} + \frac{\eta(x,y+\Delta y,t) - 2\eta(x,y,t) + \eta(x,y-\Delta y,t)}{\Delta y^2} - \frac{f^2}{gH} \eta(x, y, t) \right]$$

$$+ \beta \frac{\eta(x+\Delta x,y,t) - \eta(x-\Delta x,y,t)}{2\Delta x} = 0.$$

**Problema 2:** Considera la ecuación de transporte

$$\partial_t \theta + c\partial_x \theta = 0,$$

con discretización espacial de segundo orden

$$\partial_t \theta + c\frac{-3\theta(x,t) + 4\theta(x+\Delta x, t) - \theta(x+2\Delta x, t)}{2\Delta x} \approx 0.$$

Encuentra la relación de dispersión de esta discretización. **Recuerda que debes mostrar los cálculos para obtener todos los puntos.**

**Problema 3:**

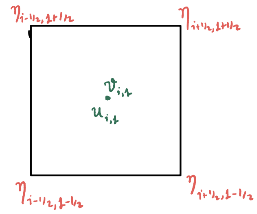


Figure 1: Configuración

Escribe un pseudo-código basado en la configuración de la figura 1 para la ecuación

$$\begin{cases} \partial_t \eta + H\partial_x u + H\partial_y v &= 0, \\ \partial_t u - fv + g\partial_x \eta &= 0, \\ \partial_t v + fu + g\partial_y \eta &= 0, \end{cases}$$

en donde se actualice $\eta_{i+1/2,j+1/2}, u_{i,j}, v_{i,j}$.

**Problema 4:** Considera la ecuación de transporte

$$\partial_t \theta + c\, \partial_x \theta = 0.$$

Buscando soluciones numéricas de la forma $\theta_i^{(n)} = \lambda^n \exp(ikx_i)$, demuestra que el método numérico

$$\theta_i^{(n+1)} = \theta_i^{(n)} - \frac{\nu}{2} \left( \theta_{i+1}^{(n+1)} - \theta_{i-1}^{(n+1)} \right)$$

es siempre von Neumann estable. Aquí $\nu = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$.