ANÁLISIS REAL I - 2020. TAREA 9

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Jueves 23 de abril
Antes de las 11:10 AM 100%
Después de las 11:10 AM y antes de las 5 PM 80%
No se aceptarán tareas después de las 5 PM
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles
Problema 1: Sea f una función compleja arbitraria en $\mathbb{R}^1$, y define

$$\varphi(x,\delta) = \sup\left\{|f(s)-f(t)| : s,t \in (x-\delta, x+\delta)\right\},$$
$$\varphi(x) = \inf\left\{\varphi(x,\delta) : \delta > 0\right\}.$$

Demuestra que φ es semicontínua por arriba, que f es continua en un punto x si y solo si $\varphi(x) = 0$
Problema 2: Construye un conjunto compacto totalmente disconexo $K \subset \mathbb{R}^1$ tal que $m(K) > 0$. (K debe no tener subconjuntos conexos de más de un punto.)
Problema 3: Si $0 < \epsilon < 1$, construye un conjunto abierto $E \subset [0,1]$ que sea denso en $[0,1]$ tal que $m(E) = \epsilon$.
Problema 4: Construye un conjunto de Borel $E \subset \mathbb{R}^1$ tal que

$$0 < m(E \cap I) < m(I)$$

para cada segmento no vacío I. Es posible que $m(E) < \infty$ para tal conjunto?
Problema 5:

(i) Encuentra la constante más pequeña tal que

$$\log\left(1+e^t\right) < c + t \ (0 < t < \infty)$$

(ii) Evalúa si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^1 \log\left(1+e^{nf(x)}\right) dx$$

existe para cada función real valuada $f \in L^1$. Si existe, cuál es su límite?