ANÁLISIS REAL I - 2020. TAREA 8

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Jueves 16 de abril

Antes de las 11:10 AM 100%

Después de las 11:10 AM y antes de las 5 PM 80%

No se aceptarán tareas después de las 5 PM

Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Sea X un espacio métrico, con métrica ρ. Para cada conjunto no vacío $E \subset X$, defínase

$$\rho_E(x) = \inf\{\rho(x, y) : y \in E\}.$$

Muestra que ρ_E es una función uniformemente continua en X. Si A y B son dos subconjuntos cerrados disjuntos en X, examina la relevancia de la función

$$f(x) = \frac{\rho_A(x)}{\rho_A(x) + \rho_B(x)}$$

en relación al lema de Urysohn.

Problema 2: Sea E el "familiar" conjunto de Cantor que resulta de empezar con el intervalo $[0, 1]$ y de ahí ir quitando los respectivos "tercios interiores" de cada sub-intervalo. Muestra que $\lambda(E) = 0$, aún cuando E y $\mathbb{R}$ tienen la misma cardinalidad. Aquí λ es la medida de Lebesgue.

Problema 3: Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas en $[0, 1]$ tales que $0 \leq f_n \leq 1$ y tal que $f_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$, para cada $x \in [0, 1]$ (convergencia puntual). Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0.$$

Trata de demostrar lo de arriba sin usar teoría de la medida ni los teoremas sobre integración de Lebesgue. (La idea es mostrar el poder de la integral de Lebesgue. Una prueba elegante está en W.F. Eberlein en *Communications on Pure and Applied Mathematics* vol. X, pp. 357-360,1957).

Problema 4: Es fácil suponer los límites de

$$\int_o^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}dx, \text{ y } \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx$$

cuando $n \to \infty$. Demuestra que tu suposición es correcta.